
Espinores desde un Vacío en 5D: Aplicaciones en el Universo Primordial y Agujeros Negros



UNIVERSIDAD NACIONAL
de MAR DEL PLATA
.....

Tesis presentada para optar al título de Doctor en
Ciencias, Área Física, de la Universidad Nacional de Mar
del Plata

Lic. Pablo Alejandro Sánchez

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad Nacional de Mar del Plata

Diciembre de 2014

Documento maquetado con T_EX_S v.1.0+.

Este documento está preparado para ser imprimido a doble cara.

Espinores desde un Vacío en 5D: Aplicaciones en el Universo Primordial y Agujeros Negros

Director de tesis

Dr. Mauricio Bellini
IFIMAR/CONICET

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de Mar del Plata

Diciembre de 2014

Copyright © T_EXIS.

*A mi madre Carmen,
que siempre me acompaña en espíritu,
porque sin ella nada de todo esto hubiera sido posible.*

Agradecimientos

Primero que nada deseo agradecer a mi director, el Dr. Mauricio Bellini, por su dedicación y entusiasmo. La mayor parte de este trabajo, fue llevado a cabo bajo su atenta dirección. La experiencia que adquirí a su lado incluye la selección de textos y artículos para encaminar mi trabajo de investigación, la forma creativa de formular los problemas físicos en términos matemáticos, la preparación de manuscritos para su posterior publicación y seguramente mucho más que por brevedad estoy omitiendo. Deseo destacar también su generosidad, sin la cual no habría podido asistir a congresos y escuelas de nivel internacional para completar mi formación doctoral.

También tengo un grato recuerdo de las horas de trabajo compartidas con mis compañeros de oficina, que se fueron alternando a medida que concluían sus estudios de doctorado; Dardo Goyeneche, Matías dell Erba, Matías Reynoso, Jesús Romero, Mariano Anabitarte y Agustín Membiela. Debo agradecerles a todos ellos por sus críticas, sugerencias y por las tardes de “café compartido”.

Y por último, no quiero olvidarme de mi universidad, ya que sin el respaldo de sus becas todo se me hubiera hecho cuesta arriba.

Índice

Agradecimientos	VII
I Conceptos introductorios	1
1. Modelos de condensado de espinores	3
1.1. Notación y formalismo espinorial: Álgebras de Clifford	5
1.1.1. Tétradas	6
1.1.2. Espinores	6
1.1.3. Conexión de espín	7
1.1.4. Conexión espinorial y coeficientes de Fock-Ivanenko	8
1.1.5. Espinor de curvatura en 4D	10
1.2. Acciones generalizadas para espinores libres	11
1.2.1. Espinores no estándar (NSS)	14
1.2.2. Autoespinores de $\mathbb{C}$ (ELKO)	16
1.2.3. Espinores no-estándar invariantes de Lorentz (NSS).	16
1.2.4. Cosmología de los campos ELKO en 4D	18
1.2.5. Cosmología de los campos NSS invariantes de Lorentz	20
2. Teorías de Materia Inducida y formulación espinorial en 5D.	23
2.1. Teorías Espacio-Tiempo-Materia (STM).	24
2.1.1. Núcleo de la teoría.	24
2.1.2. Algunas cuestiones sobre la foliación.	26
2.2. Fundamentos de las teorías STM: El teorema de Campbell-Magaard	26
2.2.1. El álgebra de los embebimientos	27
2.2.2. El teorema de Campbell-Magaard	29
2.3. Dinámica de los campos cuánticos en STM	31
2.3.1. Incerteza en 4D a partir de determinismo en 5D	31
2.3.2. El problema de la cuantización de la masa	33
2.3.3. Las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac en 5D	34
3. Introducción a los modelos de inflación	39
3.1. Dinámica del Inflatón	39
3.1.1. Dinámica clásica del inflatón	40
3.1.2. Rodadura lenta del campo clásico	41
3.1.3. Dinámica de las fluctuaciones cuánticas	42
3.1.4. Redefinición de las fluctuaciones cuánticas	43
3.2. Expansión inflacionaria desde una teoría de Kaluza-Klein no compacta	44
3.2.1. Teoría cuántica de campos en un vacío aparente en 5D	45

3.2.2. Expansión de “de Sitter” en 4D	46
II Neutrinos en agujeros negros	51
4. Modos cuasi-normales supersimétricos en un agujero negro de Schwarzschild	53
4.1. Ecuación de Dirac para un neutrino en un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico.	54
4.2. Ecuaciones de movimiento para $\phi_l^{(\uparrow\downarrow)}$	55
4.2.1. Espinor $\phi_l^{(\uparrow)}$	56
4.2.2. Espinor $\phi_l^{(\downarrow)}$	57
4.3. Neutrinos en un agujero negro de Schwarzschild.	57
4.4. Supersimetría de los operadores Hamiltonianos.	58
4.5. Soluciones aproximadas.	59
4.5.1. Espinor $\phi_l^{(\uparrow)}$	59
4.5.2. Espinor $\phi_l^{(\downarrow)}$	61
4.5.3. Soluciones asintóticas para grandes distancias: $r \rightarrow \infty$	62
4.5.4. Frecuencias cuasi-normales y temperatura de Hawking.	62
4.6. Neutrino en un agujero negro de Schwarzschild en $d > 4$ dimensiones.	62
4.7. Conclusión del capítulo.	63
5. Ecuación de Dirac para neutrinos masivos en un espacio-tiempo de Schwarzschild- de Sitter desde un vacío en 5D	65
5.1. Ecuación de Dirac para neutrinos sin masa en un vacío en 5D.	66
5.1.1. Álgebras de Clifford para espinores en 5D.	66
5.1.2. Ecuación de Dirac para espinores en 5D.	67
5.1.3. La masa de los neutrinos desde un vacío en 5D.	68
5.2. Ecuación de Dirac inducida en 4D para neutrinos masivos en un espacio-tiempo SdS.	69
5.3. Conclusión del capítulo	70
III Espinores en inflación	71
6. Ecuación de Dirac en una métrica de de-Sitter 5D para neutrinos masivos a partir del formalismo de Materia Inducida	73
6.1. Álgebras de Clifford en 5D y espinores	74
6.1.1. Separación de variables para la ecuación de Dirac en 5D	75
6.2. Ecuación de Dirac efectiva en 4D para neutrinos masivos en un espacio-tiempo de de-Sitter	77
6.3. Conclusión del capítulo	79
7. Energía oscura primordial desde un condensado de espinores en un vacío en 5D	81
7.1. Lagrangiana efectiva en un espacio Riemann-plano en 5D	82
7.2. Formulación tensorial de la ecuación de movimiento	83
7.3. Solución basada en un mapeo conforme	84
7.3.1. Solución asintótica en 4D a partir de la solución 5D del campo Φ_+	86
7.3.2. Solución asintótica en 4D a partir de la solución 5D del campo Φ_-	88

7.4. Ecuaciones de Einstein en 4D	91
7.5. Conclusión del capítulo	95
IV Conclusiones Generales	97
V Apéndices	101
A. Tensor energía-impulso	103
A.1. Cálculo de $\delta\gamma^{\rho}$	104
A.2. Cálculo de $\delta\nabla_{\mu}$	104
A.3. Derivada funcional $\frac{\delta\mathcal{L}_{\Psi}}{\delta g_{\mu\nu}}$	106
B. Cuantización de las frecuencias cuasi-normales	107
B.1. El caso con $\kappa_{\uparrow} = \ell + 1$ y $F_1^{(\uparrow)}$	108
B.2. El caso con $\kappa_{\uparrow} = \ell + 1$ y $F_2^{(\uparrow)}$	109
B.3. El caso con $\kappa_{\downarrow} = -\ell$ y $F_1^{(\downarrow)}$	109
B.4. El caso con $\kappa_{\downarrow} = -\ell$ y $F_2^{(\downarrow)}$	109
Bibliografía	111

Índice de figuras

5.1.	La función $\Upsilon(\psi)$ para diferentes valores de m_0 : a) $m_0 = 1$, b) $m_0 = 0$, c) $m_0 = -1$, d) $m_0 = -2$, e) $m_0 = -3$ and f) $m_0 = -4$	68
7.1.	$K_{homo}^{(-)}(t, H_0^{-1})$ (en trazo grueso) y la parte real de $K_{part}^{(-)}(t, H_0^{-1})$ (en trazo fino) en función del tiempo. Se tomaron $\psi_0 = H_0^{-1} = 1$ y $\kappa = 0,5H_0$ como parámetros de referencia.	91
7.2.	Esquema para la longitud de onda λ . La circunferencia en línea de trazos representa el horizonte causal. Las flechas en la circunferencia interna representan aquella parte del campo que ingresó a la región causalmente conectada.	95

Parte I

Conceptos introductorios

Esta primera parte del trabajo de tesis está dedicada a los conceptos fundamentales que serán utilizados como herramienta en el desarrollo de modelos para el estudio de objetos compactos en el universo primordial. Se hará particular énfasis en el uso de las álgebras de Clifford como matemática de base para el estudio de fermiones como campos de prueba en diferentes situaciones de aplicación a nivel relativista.

El **Capítulo 1** ofrece un panorama del álgebra de espinores en un espacio-tiempo curvo en 4D en aquellos casos de interés cosmológico. También desarrolla a título introductorio la aplicación cosmológica de los condensados de espinores, insinuando su posible relación con el concepto de energía oscura que actualmente se está investigando a nivel teórico y observacional. Es de destacar que existen muchos resultados que, partiendo de diferentes modelos, concluyen que cualquier campo que sea candidato para describir energía oscura a nivel primordial y durante inflación debe tener carácter no-local y satisfacer, al menos a escala astrofísica, invariancia de Lorentz. Se debe notar que en un universo primordial dominado por la curvatura del espacio-tiempo, la invariancia de Lorentz no debería ser necesariamente un prerequisite (esta cuestión aún es sujeto de debate).

El **Capítulo 2** desarrolla el contexto en el cual llevaremos a cabo el estudio de los modelos propuestos, a saber, el ámbito de las teorías de materia inducida (STM theories). Se explicarán algunas nociones sobre los orígenes y motivaciones de estas teorías, así como el núcleo matemático sobre el cual están basadas. Luego se revisará uno de los pilares sobre los cuales descansan estas teorías, el teorema de Campbell-Magaard. Para finalizar el capítulo se explica cómo funciona una teoría de campos cuánticos en STM, y se revisarán algunas cuestiones fundamentales que resultan de la cuantización, la reinterpretación del principio de incertidumbre y el problema de la cuantización de la masa. Se derivan las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac en este contexto.

El **Capítulo 3** desarrolla algunos de los modelos de inflación más testados. La finalidad de este capítulo es explicar en qué condiciones cualquier modelo debería ser consistente con estos resultados en el límite cosmológico. Esto nos permite verificar si el modelo resultante describe una situación física real. Observaremos que, finalmente, son los datos cosmológicos y astrofísicos por un lado, y los experimentos con aceleradores por el otro, las únicas fuentes disponibles para validar estos modelos.

Capítulo 1

Modelos de condensado de espinores

En los últimos años nuestra comprensión del universo ha mejorado notablemente gracias a la gran precisión de las observaciones cosmológicas disponibles. De acuerdo con el Modelo Estándar de la Cosmología, el cual supone a la Relatividad General como la teoría que describe la interacción gravitacional, nuestro universo está compuesto por un 4,9 % de bariones, 26,8 % de materia oscura y 68,3 % de energía oscura (Ade et al., 2013). Por otra parte, además de estos componentes, tenemos que asumir una época inflacionaria temprana con el fin de explicar el estado actual de nuestro universo. Aunque este presupuesto nos permite dar cuenta satisfactoriamente de la mayor parte de los datos cosmológicos actuales, tiene que aceptar la existencia de tres componentes desconocidos: la materia oscura, la energía oscura y el campo inflatón. Por lo tanto, nos encontramos con que las predicciones basadas en la Relatividad General, más el Modelo Estándar de la física de partículas están en desacuerdo con las observaciones astronómicas actuales, no sólo en las escalas cosmológicas, sino también en escalas galácticas donde la materia oscura juega un papel crucial. Esto indica fallas, ya sea en la física de partículas o en la relatividad general (o ambos) y, en particular, podría estar indicando la existencia de nuevas partículas / campos como candidatos a materia oscura, energía oscura e inflatón que podrían surgir en la física de altas energías (Nojiri y Odintsov, 2003; Arkani-Hamed et al., 2004; Bourliot et al., 2007; Bjælde et al., 2008; Li et al., 2007; Carroll et al., 2004; Copeland et al., 2006; Komatsu et al., 2011; Koivisto y Mota, 2008a; Mota et al., 2008; Sahni, 2004; Lesgourgues y Pastor, 2006; Balaguera-Antolínez et al., 2006; Watanabe, 2009; Poplawski, 2010).

Los espinores han jugado un papel muy importante en las matemáticas y la física de los últimos 80 años. Ellos teóricamente modelan partículas con espín semientero, como el electrón en el caso masivo o el neutrino (masivo o sin masa). Por otro lado, la estructura de espín de las variedades ha jugado un papel importante en las matemáticas modernas, mientras que en la física matemática esta estructura motivó el programa twistor (Penrose, 1967, 1968, 1969, 1977, 1999; Arkani-Hamed et al., 2010; Witten, 2004; Ferber, 1978).

En el marco de la física de partículas todos los espinores utilizados son de Dirac, de Weyl (espinores de Dirac no masivos) o espinores de Majorana. Dichos espinores, simbolizados por Ψ , obedecen una ecuación de campo la cual es de primer orden en las derivadas (ímpetu). Cosmológicamente, esta ecuación de primer orden implica que el valor medio de $\Phi = \bar{\Psi}\Psi$ y de la densidad de energía de un campo espinorial libre evoluciona como la densidad de energía de un polvo sin presión, o sea que es proporcional a $(1+z)^3$, donde z es el corrimiento al rojo. Adicionalmente, la naturaleza de primer orden en la derivada de la ecuación de campo resulta en un propagador cuántico G_F , el cual, para un ímpetu p muy grande, se comporta como $G_F \propto p^{-1}$. Esto evita que los términos de autointeracción perturbativos no puedan ser más que cuadráticos en Ψ , por ejemplo $\bar{\Psi}\Psi$ o también $\bar{\Psi}\gamma_\mu A^\mu \Psi$. El decaimiento de G_F con el ímpetu p además hace que Ψ tenga una dimensión de masa igual a $3/2$.

Si se pudiera construir una teoría de campos espinoriales donde $G_F \propto p^{-2}$ (para p grande), se obtendría una amplia gama de términos de autointeracción renormalizables y un comportamiento

cosmológico, lo que conduciría a un Ψ con dimensión de masa igual a 1. Nos referiremos a esta clase de espinores como Espinores No Estándar (NSS: Non-Standard Spinors). Esta clase de espinores se relaciona con la clase no estándar de Wigner (Wigner, 1939). Weinberg demostró que, bajo la suposición de invariancia de Lorentz y manteniendo la localidad, la única teoría de campos cuánticos con espín 1/2 es la que describe espinores estándar (Dirac, Weyl, Majorana). NSS violaría así ya sea el argumento de localidad o la invariancia de Lorentz, o quizás ambos. En lo que sigue supondremos que los modelos NSS preservan la invariancia de Lorentz, aunque no la localidad.

Siguiendo esta línea de razonamiento y con la finalidad de construir un campo cuántico, Ahluwalia-Khalilova y Grumiller (Ahluwalia-Khalilova y Grumiller, 2005a,b) desarrollaron un modelo NSS usando auto-espinores en el espacio de los impulsos del operador de conjugación de carga (ELKO: Eigenspinoren des Ladungs Konjugations Operators). Ellos mostraron que dichos espinores pertenecen a una clase no estándar de Wigner (Wigner, 1939) y que exhiben no-localidad. Además cumplen $(CPT)^2 = -\mathbb{1}$, mientras que los espinores de Dirac satisfacen $(CPT)^2 = \mathbb{1}$. En términos más matemáticos, ellos pertenecen a una clase más amplia de campos espinoriales, denominados *flagpole spinors* (da Rocha y Rodrigues, 2006). Los espinores ELKO corresponden a la clase 5, de acuerdo a la clasificación de P. Lounesto basada en covariantes bilineales, y son similares a los espinores de Majorana (da Rocha y Hoff da Silva, 2010; da Rocha y Hoff Da Silva, 2009; Hoff Da Silva y da Rocha, 2009). Cuestiones relacionadas con localidad e invariancia de Lorentz fueron investigadas en (Ahluwalia-Khalilova et al., 2010) con resultados en la dirección de este trabajo. Causalidad ha sido analizada en este contexto (Fabbri, 2010). La construcción de espinores tipo ELKO, usando auto-espinores en el espacio de los impulsos, $\lambda(\mathbf{p}, h, e)$, del operador de conjugación de carga conduce a un campo con doble helicidad. Estos espinores han sido estudiados recientemente (Böhmer, 2007a,b; Fabbri, 2010) al igual que sus efectos en cosmología (Böhmer y Mota, 2008; Böhmer y Burnett, 2008; Böhmer, 2008; Gredat y Shankaranarayanan, 2010; Böhmer y Burnett, 2010; Shankaranarayanan, 2009b,a; Böhmer y Burnett, 2009; Wei, 2011).

Sin embargo, los espinores ELKO definidos en la forma descrita anteriormente, no son invariantes de Lorentz. Se demostrará, usando el modelo de espinores NSS, donde aparece la violación en la invariancia de Lorentz. El análisis original definía la estructura de los campos completamente en términos de la base de espinores en el espacio de los impulsos y no con una acción cuya minimización implicara dicha estructura. El resultado de esto último es que la violación de la invariancia de Lorentz queda oculta en la estructura matemática del modelo.

En el caso que trataremos, se comienza con un principio de mínima acción para espinores NSS. Dado que la definición original de espinores ELKO requiere una dirección tipo espacio preferida, por lo que quedan mal definidos cuando el ímpetu apunta en esa dirección, se definirá una nueva clase de espinores NSS también basados en autoespinores del operador de conjugación de carga, con respecto al grupo de rotaciones $SO(3)$ aunque no resultarán invariantes frente a *boosts*. Se puede ver que la construcción de modelos NSS depende de la elección de cierto operador $\hat{P}$ que satisface $(\hat{P})^2 = \mathbb{1}$, el que actúa sobre Ψ extrayendo los estados que de otra manera conducirían a una densidad Hamiltoniana inconsistente. Se mostrará que existe una única elección de $\hat{P}$ que conduce a un campo espinorial invariante de Lorentz, libre de *ghosts* y con una dimensión de masa unitaria, aunque de carácter no-local. Por supuesto, además estamos interesados en el comportamiento cosmológico de los modelos NSS y la construcción del tensor energía-impulso $T_{\mu\nu}$. Para espinores ELKO se considerará la contribución a $T_{\mu\nu}$ que surge de la variación de la conexión de espín, que en la mayoría de los casos suele despreciarse.

Resumiendo, en este capítulo introduciremos una clase completa de teorías de campo basadas en espinores no estándar. La interacción dominante es a través del campo gravitacional, el cual convierte a estos espinores en *partículas oscuras* (dark spinors). Primero discutiremos ciertos modelos restringidos por la invariancia de Lorentz, luego analizaremos brevemente algunos casos más generales que violan dicha invariancia. Una característica de estas teorías es que los campos

son no-locales, lo que los convierte en candidatos deseables para construir un modelo de condensado fermiónico. Construiremos el tensor energía-impulso asociado con dichos campos para analizar luego las aplicaciones cosmológicas.

1.1. Notación y formalismo espinorial: Álgebras de Clifford

Para desarrollar el formalismo de las álgebras de Clifford en un contexto espinorial adoptaremos primero ciertas convenciones. Trabajaremos con una signatura $(+, -, -, -)$ e introduciremos las matrices γ en una base de Weyl como sigue (Böhmer et al., 2010):

$$(1.1) \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

donde las σ^i son las matrices de Pauli,

$$(1.2) \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definiremos además $\gamma^4 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, o sea,

$$(1.3) \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}.$$

Una forma más general de introducir esta última sería¹ $\gamma^4 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{abcd}\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d$, que proviene de una representación más general de dichas matrices en un álgebra de Clifford $\gamma^a = \frac{i}{4!}\varepsilon^a_{bcde}\gamma^b\gamma^c\gamma^d\gamma^e$.

En física usualmente se considera un Álgebra de Clifford a aquella generada por las matrices γ , también llamadas matrices de Dirac, las que cumplen con la siguiente propiedad fundamental (Snygg, 1997):

$$(1.4) \quad \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\eta^{ab}\mathbb{1}_{4 \times 4}.$$

Las matrices de Dirac fueron introducidas por primera vez por Paul Dirac, cuando estaba tratando de escribir una ecuación de onda relativista de primer orden para el electrón (Dirac, 1928), y obtener al mismo tiempo un isomorfismo explícito del álgebra de Clifford al álgebra de las matrices complejas. El resultado se utilizó para definir la ecuación de Dirac e introducir el operador *slash*, $\not{\partial} := \gamma^a\partial_a$. El álgebra de Clifford aparece en la teoría cuántica de campos en la forma de campos de Dirac bilineales.

La teoría de la Relatividad da una interpretación geométrica del campo gravitacional. Dicha geometría es la de las variedades Riemannianas tetradimensionales, equipadas con un tensor métrico simétrico y una conexión afín libre de torsión y compatible con la métrica. En la formulación de Einstein-Palatini de la gravedad (Palatini, 1919; Burton y Mann, 1998), equivalente a la formulación estándar de Einstein-Hilbert (Hilbert, 2007), las ecuaciones de campo surgen al variar la acción total del campo gravitacional y la materia respecto al tensor métrico y la conexión, considerados como variables independientes. Las teorías de gravedad que incorporan espinores, usan una tétrada como variable dinámica en vez de la métrica. De acuerdo con esto, la variación respecto de la conexión afín puede ser reemplazada por la variación respecto de la conexión de Lorentz. Fock e Ivanenko generalizaron la ecuación de Dirac relativista para el electrón introduciendo la derivada covariante de un espinor en una variedad Riemanniana (Fock y Iwanenko, 1929; Fock, 1929). Para incorporar los espinores en una teoría de la gravedad métrica-afín, debemos construir una derivada covariante de los espinores para una conexión afín general.

¹En la antigua notación de teoría de campos los índices corrían a partir de uno y no cero, así que esta matriz se representaba usualmente como γ^5 . En nuestra actual notación reservaremos letras latinas minúsculas ($a, b, \dots$) para la métrica de Minkowski en 4D y letras griegas minúsculas ($\mu, \nu, \dots$) para un espacio-tiempo curvo en 4D. En ambos casos los índices corren de cero a tres. Por simplicidad, suprimimos los índices espinoriales, que deberían aparecer tanto en los espinores como en las matrices de Dirac.

1.1.1. Tétradas

Una ecuación de Dirac covariante requiere que las componentes del espinor sean invariantes frente a una transformación de coordenadas (Poplawski, 2007). Además de los sistemas de coordenadas, en cada punto del espacio-tiempo hemos creado cuatro vectores ortogonales (una tétrada) y el espinor da una representación de las transformaciones de Lorentz que rotan la tétrada. Así, cualquier vector $\vec{V}$ puede expresarse por sus componentes V^μ en el sistema de coordenadas o en la representación del campo de tétradas de proyección V^a :

$$(1.5) \quad V^a = e_\mu^a V^\mu, \quad V^\mu = e_a^\mu V^a,$$

donde la tétrada e_a^μ es la inversa de e_μ^a :

$$(1.6) \quad e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu, \quad e_\mu^a e_a^b = \delta_\mu^b.$$

Las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ están relacionadas con el tensor métrico de Minkowski η_{ab} a través de la tétrada:

$$(1.7) \quad g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}.$$

Además, el determinante $\mathbf{g}$ del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ esta relacionado con el determinante de la tétrada $\mathbf{e}$ por

$$(1.8) \quad \sqrt{-\mathbf{g}} = \mathbf{e}.$$

En lo que sigue, usaremos $g_{\mu\nu}$ y su inversa para subir y bajar índices de coordenadas mientras que η_{ab} servirá para subir y bajar índices de Lorentz. Si cambiamos de una tétrada e_a^μ a otra $\tilde{e}_a^\mu$, la relación entre ellas se expresará como una combinación lineal

$$(1.9) \quad \tilde{e}_a^\mu = \Lambda^b_a e_b^\mu,$$

donde Λ es la matriz que define a una transformación de Lorentz. Si aplicamos la relación (1.7) a la tétrada $\tilde{e}_a^\mu$, resulta la relación

$$(1.10) \quad \Lambda^c_a \Lambda^d_b \eta_{cd} = \eta_{ab}.$$

Si observamos la relación (1.9) y notamos que $\det(\Lambda) = \pm 1$, vemos que podemos considerar a las matrices Λ de Lorentz como el *grupo de rotación de las tétradas* en relatividad general.

1.1.2. Espinores

Recordando la relación (1.4) para las matrices de Dirac, podemos considerar la generalización de las mismas a un espacio-tiempo curvo, a través de $\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$. Con esta relación, (1.7) y (1.4) se puede probar la siguiente:

$$(1.11) \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}_{4 \times 4}.$$

Sea L la “representación espinorial” de la rotación de una tétrada (1.9), que cumple con

$$(1.12) \quad \tilde{\gamma}^a = \Lambda^a_b L \gamma^b L^{-1}.$$

Como las matrices γ^a son constantes en alguna representación, la condición $\tilde{\gamma}^a = \gamma^a$ nos permite obtener L como función de Λ^a_b . Usando transformaciones de Lorentz infinitesimales, $\Lambda^a_b = \delta^a_b + \epsilon^a_b$, donde la antisimetría $\epsilon^a_b = -\epsilon^b_a$ se puede obtener a partir de (1.10), la solución buscada es

$$(1.13) \quad L = \mathbb{1}_{4 \times 4} + \frac{1}{2} \epsilon_{ab} \sigma^{ab}, \quad L^{-1} = \mathbb{1}_{4 \times 4} - \frac{1}{2} \epsilon_{ab} \sigma^{ab}.$$

Las matrices σ^{ab} son los generadores de la representación espinorial del grupo de Lorentz:

$$(1.14) \quad \sigma^{ab} = \frac{1}{4} (\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a).$$

Definiremos un *espinor* Ψ como aquella cantidad que frente a una rotación de la tétrada transforma (transformación de Lorentz L en el espacio interno)

$$(1.15) \quad \tilde{\Psi} = L\Psi,$$

mientras que el *espinor adjunto* $\bar{\Psi}$ se transforma como

$$(1.16) \quad \tilde{\bar{\Psi}} = \bar{\Psi}L^{-1}.$$

El espinor dual $\bar{\Psi}$ se define de tal forma que la cantidad $\bar{\Psi}\Psi$ sea un escalar en el espacio-tiempo, y además cumpla con todas las relaciones definidas para Ψ .

Se puede considerar que las matrices γ^a , además de poseer un índice Lorentziano " a ", tienen un índice "interno" asociado al espinor y otro asociado al espinor adjunto (que suprimimos por simplicidad). Dado que la derivada de un espinor no se transforma como espinor: $\tilde{\Psi}_{;\mu} = L_{;\mu}\Psi + L\Psi_{;\mu}$ (aparece el término adicional $L_{;\mu}\Psi$ en el segundo miembro), nos vemos forzados a introducir la *conexión espinorial* Γ_μ , tal que cumpla con

$$(1.17) \quad \tilde{\Gamma}_\mu = L\Gamma_\mu L^{-1} + L_{;\mu}L^{-1}.$$

Entonces, la *derivada covariante de un espinor*

$$(1.18) \quad \Psi_{;\mu} = \Psi_{;\mu} - \Gamma_\mu \Psi,$$

se transforma como espinor, $\tilde{\Psi}_{;\mu} = L\Psi_{;\mu}$.

Además, veremos que se cumple la siguiente propiedad para las matrices γ :

$$(1.19) \quad \gamma_{;\mu}^a = -[\Gamma_\mu, \gamma^a].$$

Para demostrarlo usaremos la siguiente expresión: $\tilde{\gamma}^\mu = L\gamma^\mu L^{-1}$, que proviene de la ecuación (1.12). Comenzamos por introducir la magnitud, $\gamma^\mu \Psi$, que como veremos será un espinor

$$\tilde{\gamma}^\mu \tilde{\Psi} = (L\gamma^\mu L^{-1})(L\Psi) = L(\gamma^\mu \Psi).$$

Ahora, derivaremos este espinor aplicando primero la regla de Leibnitz en el primer miembro, y luego aplicando la definición de derivada covariante de un espinor (1.18)

$$\begin{aligned} \gamma_{;\mu}^a \Psi + \gamma^a \Psi_{;\mu} &= [\gamma^a \Psi]_{;\mu} = (\gamma^a \Psi)_{;\mu} - \Gamma_\mu \gamma^a \Psi, \\ \gamma_{;\mu}^a \Psi &= \gamma_{;\mu}^a \Psi + \gamma^a \Psi_{;\mu} - \Gamma_\mu \gamma^a \Psi - \gamma^a (\Psi_{;\mu} - \Gamma_\mu \Psi), \\ \gamma_{;\mu}^a \Psi &= (\gamma_{;\mu}^a - [\Gamma_\mu, \gamma^a]) \Psi. \end{aligned}$$

Si en la ecuación de la última línea consideramos que $\gamma_{;\mu}^a = 0$, resulta la expresión (1.19).

1.1.3. Conexión de espín

La diferenciación covariante de los vectores V^μ y V_μ en relatividad general se hace respecto de la conexión afín $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$:

$$(1.20) \quad V^\mu_{;\nu} = V^\mu_{;\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} V^\rho, \quad V_{\mu;\nu} = V_{\mu;\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} V_\rho,$$

de tal manera que se cumpla $(V^\mu W_\mu)_{;\nu} = (V^\mu W_\mu)_{;\nu}$. En una variedad semi-Riemanniana la conexión afín se considera simétrica, $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$, y compatible con la métrica: $g_{\mu\nu;\rho} = 0$. Pero,

en un espacio-tiempo más general estas condiciones no se mantienen. En consecuencia, al subir y bajar índices de coordenadas no obtendremos conmutación de la derivada covariante respecto de Γ . Definimos entonces la conexión de espín $\omega^\mu_{a\nu}$

$$(1.21) \quad \omega^\mu_{a\nu} = e^\mu_{a;\nu} = e^\mu_{a,\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} e^\rho_a.$$

Los elementos $\omega^{ab}_\mu = e^a_\rho \eta^{bc} \omega^\rho_{c\mu}$ se transforman como tensores. Así, podemos extender la definición de diferenciación covariante a cantidades con índices de Lorentz

$$(1.22) \quad \nabla_\mu V^a = V^a_{;\mu} + \omega^a_{b\mu} V^b, \quad \nabla_\mu V_a = V_{a,\mu} - \omega^b_{a\mu} V_b,$$

de tal manera que, como en (1.20), se cumpla $\nabla_\mu (V^a W_a) = \partial_\mu (V^a W_a)$. Supondremos que, en general, la *derivada covariante* ∇ distingue índices coordinados y espinoriales, como lo hacen respectivamente “,” y “.”. De la misma forma que hicimos con (1.19) se puede probar la siguiente:

$$(1.23) \quad \nabla_\mu \gamma^a = \omega^a_{b\mu} \gamma^b - [\Gamma_\mu, \gamma^a].$$

También podemos escribir la expresión (1.21) usando la notación ∇ ,

$$(1.24) \quad \nabla_\nu e^\mu_a = e^\mu_{a,\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} e^\rho_a - \omega^b_{a\nu} e^\mu_b = 0.$$

Esta última define la *conexión de Lorentz* o *conexión de espín* ω^{ab}_μ en función de la conexión afín, las tétradas y sus derivadas.

1.1.4. Conexión espinorial y coeficientes de Fock-Ivanenko

Ahora obtendremos la conexión espinorial para una conexión afín general. Primero introducimos el *tensor de no-metricidad*, que caracteriza cualquier apartamiento respecto de la conexión de Levi-Civita:

$$(1.25) \quad N_{\mu\nu\rho} = g_{\mu\nu;\rho}.$$

Entonces, podemos probar que cuando tenemos en cuenta la no-metricidad en un espacio de Minkowski se cumplen las relaciones²:

$$(1.26) \quad N_{ab\rho} = \nabla_\rho \eta_{ab}, \quad N^{ab}_\rho = -\nabla_\rho \eta^{ab}.$$

Usando estas últimas se puede demostrar que

$$(1.27) \quad \omega_{(ab)\mu} = -\frac{1}{2} N_{ab\mu},$$

donde se puede apreciar que la conexión de Lorentz es antisimétrica sólo para una conexión afín compatible con la métrica. Otra importante relación puede obtenerse aplicando ∇ a ambos miembros de la ecuación (1.4) y usando (1.26)

$$(1.28) \quad \nabla_\mu \gamma^a = -\frac{1}{2} N^a_{b\mu} \gamma^b.$$

2

$$\begin{aligned} N_{ab\rho} &= -\Gamma^c_{a\rho} \eta_{cb} - \Gamma^c_{b\rho} \eta_{ca} = & N^{ab}_\rho &= N_{mn\rho} \eta^{ma} \eta^{nb} = \\ &= -\omega^c_{a\rho} \eta_{cb} - \omega^c_{b\rho} \eta_{ca} = & &= -(\Gamma^c_{m\rho} \eta_{cn} + \Gamma^c_{n\rho} \eta_{cm}) \eta^{ma} \eta^{nb} = \\ &= \nabla_\rho \eta_{ab}, & &= -(\Gamma^c_{m\rho} \delta^b_c \eta^{ma} + \Gamma^c_{n\rho} \delta^a_c \eta^{nb}) = \\ & & &= -(\omega^a_{c\rho} \eta^{cb} + \omega^b_{c\rho} \eta^{ca}) = \\ & & &= -\nabla_\rho \eta^{ab}. \end{aligned}$$

Comenzamos derivando (1.4)

$$\begin{aligned} (\nabla_\mu \gamma^a) \gamma^b + \gamma^a (\nabla_\mu \gamma^b) + (\nabla_\mu \gamma^b) \gamma^a + \gamma^b (\nabla_\mu \gamma^a) &= 2\nabla_\mu \eta^{ab} = -2N_{\mu}^{ab} \\ (\nabla_\mu \gamma^a) \gamma^b \gamma_b + \underbrace{(\gamma^a (\nabla_\mu \gamma^b) + (\nabla_\mu \gamma^b) \gamma^a + \gamma^b (\nabla_\mu \gamma^a))}_{=0} \gamma_b &= -2N_{\mu}^{ab} \gamma_b. \end{aligned}$$

Si usamos $\gamma^b \gamma_b = 4\mathbb{1}_{4 \times 4}$ en el primer término del primer miembro, entonces el segundo término se debería cancelar, obteniéndose así (1.28). Insertando la expresión que se desea probar en el término a cancelar, la demostración se completa por auto-consistencia

$$\begin{aligned} &(\gamma^a (\nabla_\mu \gamma^b) + (\nabla_\mu \gamma^b) \gamma^a + \gamma^b (\nabla_\mu \gamma^a)) \gamma_b = \\ &= -\frac{1}{2} N_{c\mu}^b \gamma^a \gamma^c \gamma_b - \frac{1}{2} N_{c\mu}^b \gamma^c \gamma^a \gamma_b - \frac{1}{2} N_{c\mu}^a \gamma^b \gamma^c \gamma_b = \\ &= -\frac{1}{2} N_{c\mu}^b (\gamma^a \gamma^c + \gamma^c \gamma^a) \gamma_b - \frac{1}{2} N_{c\mu}^a (2\eta^{bc} - \gamma^c \gamma^b) \gamma_b = \\ &= -2N_{\mu}^{ab} \gamma_b + 2N_{\mu}^{ab} \gamma_b = 0. \end{aligned}$$

A continuación se obtendrá una expresión para la conexión espinorial en términos de las conexiones de espín. Primero multiplicamos (1.28) a la izquierda por γ_a . Utilizando (1.23) y la primera de las ecuaciones en (1.26), se tiene

$$\begin{aligned} \gamma_a \nabla_\mu \gamma^a &= -\frac{1}{2} N_{b\mu}^a \gamma_a \gamma^b \\ \omega_{b\mu}^a \gamma_a \gamma^b - \gamma_a \Gamma_\mu \gamma^a + 4\Gamma_\mu &= -\frac{1}{2} N_{ab\mu} \gamma^a \gamma^b \\ (1.29) \quad \omega_{ab\mu} \gamma^a \gamma^b - \gamma_a \Gamma_\mu \gamma^a + 4\Gamma_\mu &= -\frac{1}{2} (-\omega_{a\mu}^c \eta_{cb} - \omega_{b\mu}^c \eta_{ca}) \gamma^a \gamma^b = \\ &= \frac{1}{2} \omega_{ab\mu} (\gamma^b \gamma^a + \gamma^a \gamma^b) = \\ &= \frac{1}{2} \omega_{ab\mu} (\gamma^b \gamma^a + \gamma^a \gamma^b) = \\ &= \omega_{c\mu}^c \end{aligned}$$

Por otro lado, partiendo de (1.25) se puede demostrar que³:

$$(1.30) \quad N_{c\mu}^c = -2\omega_{c\mu}^c.$$

Por lo tanto, sustituyendo (1.30) en (1.29), se verifica la siguiente expresión

$$(1.31) \quad \omega_{ab\mu} \gamma^a \gamma^b - \gamma_a \Gamma_\mu \gamma^a + 4\Gamma_\mu = -\frac{1}{2} N_{c\mu}^c.$$

A partir de esta última deseamos obtener Γ_μ . Como *ansatz* proponemos

$$(1.32) \quad \Gamma_\mu = -\frac{1}{4} \omega_{[ab]\mu} \gamma^a \gamma^b - A_\mu,$$

$$\begin{aligned} N_{ab\mu} &= \eta_{ab;\mu} = -(\omega_{a\mu}^c \eta_{cb} + \omega_{b\mu}^c \eta_{ca}), \\ N_{b\mu}^a &= -(\omega_{\mu}^{ca} \eta_{cb} + \omega_{b\mu}^c \delta_c^a), \\ N_{c\mu}^c &= -2\omega_{c\mu}^c. \end{aligned}$$

que sustituida en (1.31), junto con $\gamma_c \gamma^a \gamma^b \gamma^c = 4\eta^{ab} \mathbb{1}_{4 \times 4}$, se transforma en

$$\gamma_c A_\mu \gamma^c - 4A_\mu = -\frac{1}{2} N_{c\mu}^c - \omega_{c\mu}^c = 0.$$

Observando el primer miembro se ve que A_μ (una cantidad espinorial con índice vectorial), resultaría ser múltiplo de $\mathbb{1}_{4 \times 4}$. Suponiendo que A_μ representa algún campo no gravitacional, entonces, para espinores en un campo puramente gravitacional podemos tomar $A_\mu = 0$. Finalmente, podemos escribir para una conexión afín arbitraria

$$(1.33) \quad \Gamma_\mu = -\frac{1}{4} \omega_{[ab]\mu} \gamma^a \gamma^b = -\frac{1}{2} \omega_{ab\mu} \sigma^{ab},$$

que son conocidos en la relatividad general como *coeficientes de Fock-Ivanenko* (Fock y Iwanenko, 1929; Fock, 1929; Hehl y Datta, 1971; Lord, 1976; Aringazin y Mikhailov, 1991).

1.1.5. Espinor de curvatura en 4D

Partimos del conmutador de las derivadas covariantes del espinor Ψ

$$(1.34) \quad \begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \Psi &= \partial_\mu \nabla_\nu \Psi - \Gamma_\mu \nabla_\nu \Psi - \Gamma_\nu^\rho \nabla_\rho \Psi - \partial_\nu \nabla_\mu \Psi + \Gamma_\nu \nabla_\mu \Psi + \Gamma_\mu^\rho \nabla_\rho \Psi = \\ &= -\partial_\mu \Gamma_\nu \Psi + \Gamma_\mu \Gamma_\nu \Psi + \partial_\nu \Gamma_\mu \Psi - \Gamma_\nu \Gamma_\mu \Psi + 2S_{\mu\nu}^\rho \nabla_\rho \Psi = \\ &= K_{\mu\nu} \Psi + 2S_{\mu\nu}^\rho \nabla_\rho \Psi, \end{aligned}$$

donde $K_{\mu\nu} = -K_{\nu\mu}$ se define como

$$K_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_\mu - \partial_\mu \Gamma_\nu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu],$$

y se denomina “espinor de curvatura” o “curvatura espinorial”. Cumple con la siguiente propiedad, que se puede demostrar usando (1.17):

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\mu\nu} &= \partial_\nu \tilde{\Gamma}_\mu - \partial_\mu \tilde{\Gamma}_\nu + [\tilde{\Gamma}_\mu, \tilde{\Gamma}_\nu] = \\ &= L (\partial_\nu \Gamma_\mu - \partial_\mu \Gamma_\nu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]) L^{-1}. \end{aligned}$$

De esta última, se ve que $K_{\mu\nu}$ se transforma como las matrices de Dirac, es decir, es un espinor con un índice espinorial covariante y otro contravariante. El tensor $S_{\mu\nu}^\rho$ se denomina “tensor de torsión de Cartan” y es estándar en relatividad general cuando se incorpora el espín al formalismo relativista (Poplawski, 2007)

$$(1.35) \quad S_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{[\mu\nu]}^\rho = \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho).$$

Sabemos que $\nabla_\mu \gamma^\rho = 0$, entonces

$$(1.36) \quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \gamma^\rho = R_{\theta\mu\nu}^\rho \gamma^\theta + [K_{\mu\nu}, \gamma^\rho] = 0.$$

Multiplicando ambos miembros del último término por γ_ρ obtenemos

$$(1.37) \quad R_{\rho\theta\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\theta + \gamma_\rho K_{\mu\nu} \gamma^\rho - 4K_{\mu\nu} = 0.$$

El ansatz propuesto como solución a esta ecuación es

$$(1.38) \quad K_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R_{\rho\theta\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\theta + B_{\mu\nu}.$$

Sustituyendo (1.38) en (1.37) resulta

$$(1.39) \quad \gamma_\rho B_{\mu\nu} \gamma^\rho - 4B_{\mu\nu} = 0.$$

Así, $B_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico múltiplo de $\mathbb{1}_{4 \times 4}$. Se puede demostrar que está relacionado con A_μ en (1.32) a través de

$$(1.40) \quad B_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

En el caso que $A_\mu = 0$ se obtiene $B_{\mu\nu} = 0$, que se reduce al formalismo de Fock-Ivanenko. Finalmente podemos expresar la curvatura espinorial en este caso como

$$(1.41) \quad K_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R_{\rho\theta\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\theta = \frac{1}{2} R_{\rho\theta\mu\nu} \sigma^{\rho\theta}.$$

En lo que sigue haremos uso de las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= \gamma^\mu \nabla_\mu (\gamma^\nu \nabla_\nu \Psi) = \\ &= \gamma^\mu \underbrace{(\nabla_\mu \gamma^\nu)}_{=0} \nabla_\nu \Psi + \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi = \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} 2\nabla^2 \Psi &= \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi + \gamma^\nu \gamma^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu \Psi = \\ &= (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi + \gamma^\nu \gamma^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu \Psi = \\ &= 2\nabla^2 \Psi + \gamma^\mu \gamma^\nu [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \Psi, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$(1.42) \quad \nabla^2 \Psi = \nabla^2 \Psi + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \Psi.$$

Expresaremos esta última en términos del escalar de Riemann (Carmeli y Malin, 2000; Hehl et al., 1976), para lo cual usaremos el hecho que $\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} \mathbb{1} + \sigma^{\mu\nu}$, (1.34), la expresión (1.41) y $R_{\rho\theta\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\theta}$

$$\begin{aligned} (1.43) \quad \nabla^2 \Psi &= \nabla^2 \Psi + \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \mathbb{1} + \sigma^{\mu\nu}) (K_{\mu\nu} \Psi + 2S^\rho_{\mu\nu} \nabla_\rho \Psi) = \\ &= \nabla^2 \Psi + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} K_{\mu\nu} \Psi + \sigma^{\mu\nu} S^\rho_{\mu\nu} \nabla_\rho \Psi = \\ &= \nabla^2 \Psi + \mathcal{R} \Psi + S^\rho_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \nabla_\rho \Psi \end{aligned}$$

donde $\mathcal{R} = \frac{1}{8} R_{\mu\nu\rho\theta} \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\theta}$. En los casos más comunes la torsión $S^\rho_{\mu\nu} = 0$ por lo que nos queda

$$(1.44) \quad \nabla^2 \Psi = \nabla^2 \Psi + \mathcal{R} \Psi.$$

1.2. Acciones generalizadas para espinores libres

Comenzamos con un campo espinorial no masivo y libre de interacciones Ψ , en un espacio-tiempo plano (con tétradas $e^a_\mu = \delta^a_\mu$ tal que $\Gamma_\mu = 0$), que debe satisfacer la ecuación de Klein-Gordon:

$$(1.45) \quad \partial^2 \Psi = m_\psi^2 \Psi.$$

Se pueden definir dos densidades Lagrangianas,

$$(1.46) \quad \mathcal{L}^{(1)} = (\bar{\Psi} \overleftarrow{\not{\partial}})(\not{\partial} \Psi) - m_\Psi^2 \bar{\Psi} \Psi,$$

$$(1.47) \quad \mathcal{L}^{(2)} = (\partial_\mu \bar{\Psi})(\partial^\mu \Psi) - m_\Psi^2 \bar{\Psi} \Psi,$$

tal que podemos variar la acción respecto de Ψ y $\bar{\Psi}$ independientemente y ambas ecuaciones de movimiento difieren al menos en un término de superficie. Esta aparente equivalencia, radica en la igualdad $\partial^2 \Psi = \not{\partial}^2 \Psi$, la cual se pierde al promover la derivada parcial ordinaria a un espacio curvo tomando $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$. Es aquí donde debe elegirse una de las dos densidades para promoverla. Aún en el espacio de Minkowski, subsiste un problema con ambas acciones. La ecuación de campo (1.45) restringe la evolución de cada una de las componentes del espinor pero no impone ninguna relación entre ellas. Definiremos una base ψ_k donde $k = 1, 2, 3, 4$ en el espacio interno, tal que $\bar{\psi}_k \psi_j = 0$ si $k \neq j$ y $\partial_\mu \psi_k = 0$. Supondremos además que $\partial_\mu \bar{\psi}_k = 0$.

Sin embargo, la invariancia de Lorentz nos impide definir $\bar{\psi}_k \psi_j = \delta_{kj}$, así que en su lugar impondremos $\bar{\psi}_1 \psi_1 = \bar{\psi}_2 \psi_2 = 1$ y $\bar{\psi}_3 \psi_3 = \bar{\psi}_4 \psi_4 = -1$. En este caso, las soluciones de están dadas por

$$(1.48) \quad \Psi = \sum_{k, \mathbf{p}} a_k(\mathbf{p}) \frac{1}{2E_p} e^{i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \psi_k + \sum_{k, \mathbf{p}} b_k^\dagger(\mathbf{p}) \frac{1}{2E_p} e^{-i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \psi_k,$$

donde $a_k(\mathbf{p})$ y $b_k^\dagger(\mathbf{p})$ son funciones del impulso $\mathbf{p}$ y $E_p = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. En esta fórmula $\sum_p = \int d^3 p$, dado que estamos trabajando en el continuo. Introducimos la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H} = \dot{\bar{\Psi}} \bar{\pi} + \pi \dot{\Psi} - \mathcal{L}^{(1)}$ donde el impulso se define como $\pi = \frac{\delta \mathcal{L}^{(1)}}{\delta \dot{\Psi}} = \dot{\bar{\Psi}}$ y $\bar{\pi} = \frac{\delta \mathcal{L}^{(1)}}{\delta \dot{\bar{\Psi}}} = \dot{\Psi}$. En el espacio plano, la densidad Hamiltoniana definida a partir de $\mathcal{L}^{(2)}$ difiere de la basada en $\mathcal{L}^{(1)}$ a menos de una derivada total, que es irrelevante y puede despreciarse. Entonces tenemos

$$(1.49) \quad \mathcal{H} = \left[\pi \bar{\pi} + \nabla^i \bar{\Psi} \nabla_i \Psi + m^2 \bar{\Psi} \Psi \right].$$

Tomando $\epsilon_k = \bar{\Psi}_k \Psi_k$, uno puede mostrar que

$$(1.50) \quad H = \int d^3 p \mathcal{H} = \sum_k \epsilon_k \sum_p \frac{(E_p^2 + \mathbf{p}^2 + m^2)}{2E_p} \left[a_k^\dagger(\mathbf{p}) a_k(\mathbf{p}) + b_k(\mathbf{p}) b_k^\dagger(\mathbf{p}) \right],$$

la cual se transforma en

$$(1.51) \quad H = \int d^3 p \mathcal{H} = \sum_k \epsilon_k \sum_p (E_p) \left[a_k^\dagger(\mathbf{p}) a_k(\mathbf{p}) + b_k(\mathbf{p}) b_k^\dagger(\mathbf{p}) \right].$$

Finalmente podemos suponer que aquellas expresiones serán promovidas a operadores y, dado que nos referimos a partículas con espín 1/2, sabemos que trabajamos con fermiones y así, con relaciones de anti-conmutación canónicas.

$$(1.52) \quad H = \int d^3 p \mathcal{H} = \sum_k \epsilon_k \sum_p (E_p) \left[a_k^\dagger(\mathbf{p}) a_k(\mathbf{p}) - b_k^\dagger(\mathbf{p}) b_k(\mathbf{p}) \right].$$

Esto produce una densidad Hamiltoniana patológicamente definida, que no es definida positiva. Sin embargo, sabemos que si fuéramos a escribir el espinor de Dirac en la ecuación de Klein-Gordon, y siguiéramos los mismos pasos obtendríamos una densidad Hamiltoniana consistente. De esta manera, hay un operador de proyección implícito, el cual remueve las componentes del espinor que producen una densidad Hamiltoniana inconsistente. Es importante remarcar que esta no corresponde directamente a la energía ya que la energía está contenida implícitamente en la suma. Por lo tanto, conservamos la información sobre autoestados de energía positivos y negativos. Supongamos que a_k y $a_k^\dagger$ representan operadores de aniquilación y de creación respectivamente, entonces $a_k^\dagger a_k \neq 0$ y $b_k^\dagger b_k \neq 0$. Si interpretamos $\bar{\Psi} \Psi$ como la densidad de energía del campo espinorial con $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -\epsilon_3 = -\epsilon_4 = 1$, se deduce que el campo puede tener una densidad de energía negativa, a menos que haya alguna condición adicional que requiera $a_3 = a_4 = 0$ y $b_1 = b_2 = 0$ en la definición de Ψ . Además, sin tal requerimiento podría ser

posible tener estados con $a_k^\dagger a_k \geq 0$ y $b_k^\dagger b_k \geq 0$ pero energía cero. Los estados de energía negativa (ghosts) conducen a inestabilidades tanto a nivel clásico como a nivel de campos cuánticos. El requerimiento que $a_3 = a_4 = 0$ y $b_1 = b_2 = 0$ puede ser visto como una ecuación para la cual Ψ proyecta estados de energía negativos, es decir, tendríamos $\mathcal{P}\Psi = \Psi$ para un operador $\mathcal{P}$ con la siguiente propiedad:

$$(1.53) \quad \mathcal{P}(\psi_k e^{\mp i p_\mu x^\mu}) = \mp \epsilon_k \psi_k e^{\mp i p_\mu x^\mu},$$

donde $p^\mu = (E_p, \mathbf{p}^k)$. Esta forma implica que cuando uno se mueve en el espacio de los impulsos; $\mathcal{P}(p^\mu)$ es una función impar de p^μ . Si uno pretendiera definir espinores usando un $\mathcal{P}(p^\mu)$ que fuera una función par de p^μ , se debería pedir que $a_k(\mathbf{p})$ y $b_k(\mathbf{p})$ satisfagan leyes de conmutación, y así obtendríamos campos que obedecen la estadística de Bose-Einstein. Definimos ahora los operadores de proyección:

$$(1.54) \quad \mathcal{P}_\pm = \frac{1}{2} [\mathbb{1} \pm \mathcal{P}],$$

tal que,

$$\mathcal{P}_\pm \mathcal{P}_\pm \equiv \mathcal{P}_\pm, \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_\pm \mathcal{P}_\mp \equiv 0.$$

Los modos de energía positivos/negativos corresponden respectivamente a aquellos que obedecen $\mathcal{P}_+ \Psi = \Psi$ y $\mathcal{P}_- \Psi = \Psi$, por ejemplo

$$(1.55) \quad \mathcal{P}_+ \Psi = \frac{1}{2} \sum_{k, \mathbf{p}} (1 + \epsilon_k) a_k(\mathbf{p}) e^{i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \psi_k + \frac{1}{2} \sum_{k, \mathbf{p}} (1 - \epsilon_k) b_k^\dagger(\mathbf{p}) e^{-i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \psi_k.$$

De la misma forma, definimos $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, que cumpla $\int d^4x \sqrt{-g} \bar{\eta} \mathcal{P} \chi \cong \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\eta} \overleftarrow{\mathcal{P}} \chi$, donde $\cong$ es válida a menos de un término de superficie. Además $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ verifica las mismas relaciones definidas para $\mathcal{P}$. Ahora podemos introducir

$$(1.56) \quad \Psi_\pm = \mathcal{P}_\pm \Psi, \quad \bar{\Psi}_\pm = \bar{\Psi} \overleftarrow{\mathcal{P}}_\pm.$$

Reescribimos entonces el Hamiltoniano, que con $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -\epsilon_3 = -\epsilon_4 = 1$, se convierte en

$$(1.57) \quad \begin{aligned} H &= \frac{1}{4} \sum_{k, \mathbf{p}} E_p \left[\epsilon_k (1 + \epsilon_k)^2 a_k^\dagger(\mathbf{p}) a_k(\mathbf{p}) - \epsilon_k (1 - \epsilon_k)^2 b_k^\dagger(\mathbf{p}) b_k(\mathbf{p}) \right] \\ &= \sum_{k=1, \mathbf{p}}^2 E_p a_k^\dagger(\mathbf{p}) a_k(\mathbf{p}) + \sum_{k=3, \mathbf{p}}^4 E_p b_k^\dagger(\mathbf{p}) b_k(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

que es ahora definida positiva para cualquier campo espinorial, dado que satisface la condición de proyección (1.53).

A continuación discutiremos un enfoque alternativo para hacer cumplir la condición de que sólo los modos de energía positivos pueden propagarse, es decir, $\Psi = \Psi_+$ y $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_+$, que son equivalentes a $\mathcal{P}_- \Psi = 0$ y $\bar{\Psi} \overleftarrow{\mathcal{P}}_- = 0$. Supóngase que tomamos inicialmente la densidad Lagrangiana como $\mathcal{L}_\Psi(\Psi, \bar{\Psi})$. Proyectaríamos los modos no físicos agregando un término extra a la Lagrangiana $\mathcal{L}_\Psi \rightarrow \mathcal{L}_\Psi + \mathcal{L}_P$, donde

$$(1.58) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_P &= -\bar{\chi}(\mathcal{P}_-) \Psi + \bar{\Psi}(\overleftarrow{\mathcal{P}}_-) \chi, \\ &\cong -\bar{\chi}(\overleftarrow{\mathcal{P}}_-) \Psi + \bar{\Psi}(\mathcal{P}_-) \chi, \end{aligned}$$

tal que $\cong$ indica igualdad a menos de una derivada total. Variando la acción con respecto a χ entonces da $\Psi_- = \bar{\Psi}_- = 0$, tal como esperábamos. Con $\mathcal{S}_\Psi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\Psi$, las otras ecuaciones

de campo que provienen de variar la acción respecto de Ψ y $\bar{\Psi}$ son:

$$(1.59) \quad \left[\frac{\delta \mathcal{S}_\Psi}{\delta \bar{\Psi}} \right]_+ = 0, \quad \left[\frac{\delta \mathcal{S}_\Psi}{\delta \Psi} \right]_+ = 0,$$

$$(1.60) \quad \left[\frac{\delta \mathcal{S}_\Psi}{\delta \bar{\Psi}} \right]_- = \chi_-, \quad \left[\frac{\delta \mathcal{S}_\Psi}{\delta \Psi} \right]_- = \bar{\chi}_-,$$

siendo χ_+ y $\bar{\chi}_+$ grados de libertad indeterminados que no entran en las ecuaciones de campo o en la acción. Podemos integrar los campos χ sustituyendo Ψ y $\bar{\Psi}$ por Ψ_+ y $\bar{\Psi}_+$ en la Lagrangiana $\mathcal{L}_\Psi$, o sea que $\mathcal{L}_\Psi(\Psi, \bar{\Psi}) \rightarrow \mathcal{L}_\Psi(\Psi_+, \bar{\Psi}_+)$, obteniéndose

$$(1.61) \quad \left[\frac{\delta \mathcal{S}_\Psi}{\delta \bar{\Psi}_+} \right]_+ = \left[\frac{\delta \mathcal{S}_\Psi}{\delta \Psi_+} \right]_+ = 0.$$

De (1.53) sabemos que $\mathcal{P}^2 \cong \mathbb{1}$, donde $\cong$ implica que la equivalencia se mantiene merced a la ecuación de campo $\mathbf{p}^2 = m^2$. Si $\mathcal{P}^2$ es una función par de $\mathbf{p}$ y $\mathcal{P}(\mathbf{p})$ es una función impar, podemos escribir $\mathcal{P}^2 = \mathcal{F}(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2} - 1)$ donde $\mathcal{F}$ es algún operador que depende de $\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}$; entonces se debe cumplir $\mathcal{F}(0) = \mathbb{1}$. Si $\mathcal{F}(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2} - 1) = \mathbb{1}$ implica que $\frac{\mathbf{p}^2}{m^2} = 1$, es decir si $\mathcal{P}^2 = \mathcal{F} = \frac{\mathbf{p}^2}{m^2}$, entonces $\mathcal{P}\Psi = \Psi$ implica que la ecuación de campo $\mathbf{p}^2\Psi = m^2\Psi$ vuelve a esta última redundante. De esta manera sería suficiente tomar la acción total simplemente

$$(1.62) \quad \mathcal{L}_\Psi = \mathcal{L}_P.$$

Esto es justamente lo que ocurre con los campos de Dirac y de Majorana donde los operadores $\mathcal{P}$ son $\mathcal{P}_D = i\not{\nabla}/m$ y $\mathcal{P}_M = C i\not{\nabla}/m$ respectivamente. Para el caso de Majorana se requiere que $C\Psi = \Psi^c$ y $C^2 = \mathbb{1}$, donde Ψ^c es el espinor de conjugación de carga. La positividad de la energía requiere $\bar{\chi} = m\bar{\Psi} = m\Psi^\dagger\gamma^0$ en el caso de Dirac, y $\bar{\chi} = m\bar{\Psi}C$ en el caso de Majorana.

1.2.1. Espinores no estándar (NSS)

En el espacio de Minkowski, podemos definir una clase general de espinores libres no estándar (NSS) que, en el espacio de los impulsos cumplen:

$$(1.63) \quad \mathbf{p}^2\Psi(\mathbf{p}) = m^2\Psi(\mathbf{p}),$$

$$(1.64) \quad \mathcal{P}(p^\mu)\Psi(\mathbf{p}) = \Psi(\mathbf{p}),$$

donde $\mathcal{P}(p^\mu) = -\mathcal{P}(-p^\mu)$ y $\mathcal{P}^2(p^\mu) = \mathbb{1}$ no implican automáticamente $\mathbf{p}^2 = m^2$, de tal forma que las ecuaciones (1.63) y (1.64) resulten independientes; la primera fija la dinámica mientras que la segunda establece la estructura del espinor. Una forma para el operador podría ser:

$$(1.65) \quad \mathcal{P}(\mathbf{p}) = \sin\left(\frac{\pi\mathbf{p}}{2m}\right),$$

así $\mathcal{P}^2 = \sin^2(\frac{\pi\sqrt{p_\mu p^\mu}}{2m})$ y $\mathcal{P}^2 = \mathbb{1}$ implica que $\frac{\pi\sqrt{p_\mu p^\mu}}{2m} = 2n + 1$ para $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, aunque esto no implica que $\mathbf{p}^2 = m^2$ globalmente, lo requiere al menos localmente. Esto quiere decir que en el espacio de los impulsos, para p^μ cerca del subespacio $S_{\mathbf{p}^2=m^2}$, la relación $\mathcal{P}^2 = \mathbb{1}$ requiere que p^μ pertenezca a $S_{\mathbf{p}^2=m^2}$. Por lo tanto la ecuación (1.63) es de nuevo superflua y debemos requerir algo más en la definición de un campo NSS; para que en alguna región abierta alrededor del subespacio $S_{\mathbf{p}^2=m^2}$, se cumpla $\mathcal{P}^2(p) \equiv \mathbb{1}$.

Además, pretendemos que en nuestra definición los campos NSS tengan una dimensión de masa canónica igual a la unidad, como en las teorías escalares. Esta definición de dimensión de masa, determina la renormalización de los términos de auto-interacción del potencial usando

argumentos de conteo de potencias. Un campo NSS de dimensión de masa uno podría ser renormalizable con un término de auto-interacción de hasta cuarto orden $(\bar{\Psi}\Psi)^2$, aparte del término de masa $\bar{\Psi}\Psi$.

Por otra parte, $\mathcal{P}$ debe ser elegido de tal forma que la acción del espinor NSS sea real. Así, el espinor dual debería cumplir con $(\bar{\Psi}\Psi)^\dagger = \bar{\Psi}\Psi$. Para que el término cinético resulte real debe ocurrir que $\vec{\nabla}^2 = \overleftarrow{\nabla}^2$, o bien $\vec{\nabla}^2 = \overleftarrow{\nabla}^2$. Finalmente, para que el término de proyección $\mathcal{L}_P$ resulte real se requiere que $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}}$.

Resumimos la definición de NSS como sigue: *Un espinor no estándar Ψ se define por medio de un operador $\mathcal{P}(p^\mu)$, que cumple con las siguientes propiedades:*

1. $\mathcal{P}(p^\mu)$ es una función impar: $\mathcal{P}(p^\mu) = -\mathcal{P}(-p^\mu)$.
2. $\mathcal{P}^2 \equiv \mathbb{1}$ se cumple para todo espinor (no solamente los que satisfacen la ecuación $\mathbf{p}^2 = m^2$).
3. $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}}$ para asegurar que la acción sea real.

La segunda condición implica que si $\lambda \rightarrow \infty$, $\mathcal{P}(\lambda p^\mu) \sim \mathcal{O}(\lambda^0)$. El operador adjunto de $\mathcal{P}$ es $\bar{\mathcal{P}}$, y podemos definir $\mathcal{P}_\pm = (\mathbb{1} \pm \mathcal{P})/2$, $\bar{\mathcal{P}}_\pm = (\mathbb{1} \pm \bar{\mathcal{P}})/2$ y $\Psi_\pm = \mathcal{P}_\pm \Psi$, $\bar{\Psi}_\pm = \bar{\Psi} \bar{\mathcal{P}}_\pm$. Los “modos físicos” son $\Psi = \Psi_+$ y $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_+$. Comenzando con una Lagrangiana cualquiera $\mathcal{L}(\Psi, \bar{\Psi})$ podemos proyectar (en el sentido de extraer) los modos no físicos ya sea agregando $\mathcal{L}_P = -\bar{\chi}(\mathcal{P}_-)\Psi - \bar{\Psi}(\bar{\mathcal{P}}_-)\chi$ o bien reemplazando la Lagrangiana con $\mathcal{L}(\Psi_+, \bar{\Psi}_+)$. Ambos métodos dan como resultado las mismas ecuaciones para los campos.

Un espinor no estándar libre de interacciones satisface $\Psi = \Psi_+$, es decir $\Psi = \mathcal{P}\Psi$ y

$$(1.66) \quad [(\mathbf{p}^2 - m^2)\Psi]_+ = 0.$$

En el espacio de Minkowski esta ecuación para un campo NSS proviene de dos acciones que en un espacio curvo no son equivalentes. Con la Lagrangiana total tomada como $\mathcal{L}_{\text{libre}}(\Psi, \bar{\Psi}) + \mathcal{L}_P \cong \mathcal{L}_{\text{libre}}(\Psi_+, \bar{\Psi}_+)$, las dos elecciones para $\mathcal{L}_{\text{libre}}$ son:

$$(1.67) \quad \mathcal{L}_{\text{libre}}^{(1)} = (\bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}) \nabla \Psi - m^2 \bar{\Psi} \Psi,$$

$$(1.68) \quad \mathcal{L}_{\text{libre}}^{(2)} = (\bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}^\mu \nabla_\mu \Psi) - m^2 \bar{\Psi} \Psi.$$

Al aplicar mínima acción se obtienen respectivamente

$$(1.69) \quad \left[\nabla^2 \Psi_+ + m^2 \Psi_+ \right]_+ = 0, \quad \left[\bar{\Psi}_+ \overleftarrow{\nabla}^2 + m^2 \bar{\Psi}_+ \right]_+ = 0,$$

y

$$(1.70) \quad \left[\nabla^2 \Psi_+ + m^2 \Psi_+ \right]_+ = 0, \quad \left[\bar{\Psi}_+ \overleftarrow{\nabla}^2 + m^2 \bar{\Psi}_+ \right]_+ = 0.$$

Notamos que si se toma la acción para NSS con $\mathcal{P}(p^\mu) = i\not{p}/m$ entonces al integrar sobre χ y $\bar{\chi}$ recuperamos la acción para el espinor de Dirac.

Podemos generalizar las acciones para campos libres incluyendo términos de auto-interacción reemplazando $m\bar{\Psi}\Psi$ con $V(\bar{\Psi}, \Psi)$, de forma que $\mathcal{L}_\Psi(\Psi, \bar{\Psi}) + \mathcal{L}_P \cong \mathcal{L}_\Psi(\Psi_+, \bar{\Psi}_+)$ siendo

$$(1.71) \quad \mathcal{L}_\Psi^{(1)} = (\bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}) \nabla \Psi - V(\bar{\Psi}, \Psi),$$

$$(1.72) \quad \mathcal{L}_\Psi^{(2)} = (\bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}^\mu \nabla_\mu \Psi) - V(\bar{\Psi}, \Psi).$$

Como vimos previamente, con argumentos de conteo de potencias notamos que un potencial perturbativamente renormalizable tendrá la forma

$$(1.73) \quad V(\bar{\Psi}, \Psi) = V_0 + m^2 \bar{\Psi} \Psi + \frac{\lambda}{2} (\bar{\Psi} \Psi)^2.$$

1.2.2. Autoespinores de $\mathbf{C}$ (ELKO)

Según (Ahluwalia-Khalilova y Grumiller, 2005a,b) estos espinores, denominados ELKOs (Eigenspinoren des Ladungs Konjugations Operators), se pueden construir en el espacio de los impulsos a partir de los autoespinores del operador de conjugación de carga. Se sabe que satisfacen $(CPT)^2 = -\mathbb{1}$. El operador de conjugación de carga $\lambda(\mathbf{p}, e, h)$ cumple

$$(1.74) \quad \mathbf{C} \lambda(\mathbf{p}, e, h) \equiv -\gamma^2 \lambda^*(\mathbf{p}, e, h) = e \lambda(\mathbf{p}, e, h),$$

$$(1.75) \quad \mathbf{H}(\hat{\mathbf{p}}) \lambda(\mathbf{p}, e, h) = h \lambda(\mathbf{p}, e, h),$$

donde $e, h = \pm 1$ y el operador dual de helicidad es

$$(1.76) \quad \mathbf{H}(\hat{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & -\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \gamma^0 \gamma^i \hat{\mathbf{p}}^i.$$

Así, el campo ELKO libre puede escribirse como

$$(1.77) \quad \Psi(x) = \sum_{\mathbf{p}, h} a_h(\mathbf{p}) \lambda(\mathbf{p}, +1, h) e^{-ip_\mu x^\mu} + \sum_{\mathbf{p}, h} b_h^\dagger(\mathbf{p}) \lambda(\mathbf{p}, -1, h) e^{ip_\mu x^\mu},$$

donde $p^\mu = (E_p, \mathbf{p}^i)$, $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ y se tienen los espinores de la base

$$(1.78) \quad \lambda(\mathbf{p}, +1, \pm 1) = \begin{pmatrix} \pm i e^{i\alpha(\mathbf{p})} \phi_\pm(\mathbf{p}) \\ \phi_\pm(\mathbf{p}) \end{pmatrix},$$

$$(1.79) \quad \lambda(\mathbf{p}, -1, \pm 1) = \begin{pmatrix} \mp i e^{i\alpha(\mathbf{p})} \phi_\pm(\mathbf{p}) \\ \phi_\mp(\mathbf{p}) \end{pmatrix},$$

En estos últimos se cumple $\sigma \cdot \mathbf{p} \phi_\pm(\mathbf{p}) = \pm \phi_\pm(\mathbf{p})$ y $\phi_a^\dagger(\mathbf{p}) \phi_b(\mathbf{p}) = \delta_{ab}$. Los espinores de la base estarán relacionados por

$$(1.80) \quad \phi_\pm(\mathbf{p}) = \mp e^{-i\alpha(\mathbf{p})} i\sigma_2 \phi_\mp^*(\mathbf{p}) \quad \text{y} \quad \phi_\pm(\mathbf{p}) = \mp e^{\pm i\beta(\mathbf{p})} F(\mathbf{p}) \phi_\mp(\mathbf{p}),$$

para algún $\alpha(\mathbf{p})$ y $\beta(\mathbf{p})$, donde $F^2(\mathbf{p}) = \mathbb{1}$, $F^\dagger = F$ y $F(\mathbf{p}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma$. Aquí, $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p})$ es un versor en la dirección $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{z}}$ mientras que $\hat{\mathbf{z}}$ es un versor en alguna dirección fija en el espacio.

Para completar la definición de los espinores ELKO se debe encontrar algún operador $\mathcal{P}$, que sea impar y tal que $\mathcal{P}\Psi = \Psi$. Construyendo explícitamente dicho operador

$$(1.81) \quad \mathcal{P}_{\text{ELKO}}(p^\mu; \hat{\mathbf{z}}) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma e^{i(\alpha - \beta \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}})} \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma e^{-i(\alpha - \beta \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}})} & 0 \end{pmatrix},$$

se puede comprobar que al depender de $\hat{\mathbf{z}}$ y $\hat{\mathbf{p}}$, $\mathcal{P}_{\text{ELKO}}$ no resulta invariante de Lorentz (Ahluwalia-Khalilova et al., 2010). Existe una forma modificada para estos espinores que queda bien definida para todo valor del impulso y además resulta invariante bajo rotaciones, aunque no queda invariante bajo “boosts”.

1.2.3. Espinores no-estándar invariantes de Lorentz (NSS).

Podemos preguntarnos ahora si existe alguna definición razonable de operador de proyección $\mathcal{P}(p^\mu)$ invariante de Lorentz que satisfaga $\mathcal{P}^2 = \mathbb{1}$ (más allá de la restricción $\mathbf{p}^2 = m^2$), así como las demás condiciones sobre $\mathcal{P}$. Sabemos que dicho operador debe ser no local, ya que se ha demostrado que los supuestos de localidad e invariancia de Lorentz implican que la única teoría de campos de espín 1/2 es la de espinores de Dirac/Majorana. Trabajando en el espacio de Minkowski y en la representación de impulsos, la invariancia de Lorentz implica que no podemos introducir ningún marco de referencia preferido para los campos. Eso significa que $\mathcal{P}$ puede ser

construido sólo a partir de los operadores covariantes de Lorentz $\mathbb{1}$, p^μ y γ^μ . Además sabemos que debe ser una función impar y $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}}$.

Teniendo en cuenta todas las condiciones, la única elección posible es

$$(1.82) \quad \mathcal{P}(p^\mu) \equiv \frac{1}{2}(1 + i\gamma^5)\mathcal{P}_0(p^\mu) + \frac{1}{2}(1 - i\gamma^5)\bar{\mathcal{P}}_0(p^\mu),$$

donde

$$(1.83) \quad \mathcal{P}_0 = p^{-1}\not{p},$$

y $p = \sqrt{p^\mu p_\mu}$. Así tenemos $\mathcal{P}_0^2 = \mathbb{1}$. Con esta elección se cumple $\bar{\Psi} = \Psi$ y además resulta que $\bar{\gamma}^5 = \gamma^0 \gamma^{5\dagger} \gamma^0 = -\gamma^5$. Con esto el operador $i\gamma^5$ es auto-dual. Como propiedades complementarias resultan que γ^5 anti-conmuta con $\mathcal{P}_0$. También se puede mostrar que $\bar{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{P}_0$ optando por el signo adecuado de $p^\mu p_\mu$. Por lo tanto, $\bar{\mathcal{P}}_0$ y $\mathcal{P}_0$ conmutan y $\bar{\mathcal{P}}_0^2 = \mathbb{1}$. Es fácil ver que $\mathcal{P}$, definido de esta manera, es una función impar dado que también lo es $\mathcal{P}_0$. Podemos comprobar explícitamente

$$(1.84) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}^2 &= \frac{1}{4}(1 + i\gamma^5)\mathcal{P}_0(1 + i\gamma^5)\mathcal{P}_0 + \frac{1}{4}(1 + i\gamma^5)\mathcal{P}_0(1 - i\gamma^5)\bar{\mathcal{P}}_0 \\ &\quad + \frac{1}{4}(1 - i\gamma^5)\bar{\mathcal{P}}_0(1 + i\gamma^5)\mathcal{P}_0 + \frac{1}{4}(1 - i\gamma^5)\bar{\mathcal{P}}_0(1 - i\gamma^5)\bar{\mathcal{P}}_0, \\ &= \frac{1}{4}(1 + i\gamma^5)(1 - i\gamma^5) [\mathcal{P}_0^2 + \bar{\mathcal{P}}_0^2] \\ &\quad + \frac{1}{4} [(1 + i\gamma^5)^2 \mathcal{P}_0 \bar{\mathcal{P}}_0 + (1 - i\gamma^5)^2 \bar{\mathcal{P}}_0 \mathcal{P}_0], \\ &= \mathbb{1} + \frac{1}{2}i\gamma^5 [\mathcal{P}_0, \bar{\mathcal{P}}_0] = \mathbb{1}. \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de las propiedades resultantes de la definición de $\mathcal{P}$. Dado que $\bar{\Psi} = \Psi$, se cumple $(\bar{\Psi}\Psi)^\dagger = \bar{\Psi}\Psi$ y la acción resulta real siempre que la condición $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}}$ sea satisfecha. Mostramos esto último explícitamente:

$$(1.85) \quad \begin{aligned} \bar{\mathcal{P}} &= \frac{1}{2}\bar{\mathcal{P}}_0(1 + i\gamma^5) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_0(1 - i\gamma^5), \\ &= \frac{1}{2}(1 - i\gamma^5)\bar{\mathcal{P}}_0 + \frac{1}{2}(1 + i\gamma^5)\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}, \end{aligned}$$

En el espacio de Minkowski y en representación de coordenadas

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}(1 + i\gamma^5)\mathcal{P}_0 + \frac{1}{2}(1 - i\gamma^5)\bar{\mathcal{P}}_0, \quad \text{con} \quad \mathcal{P}_0 = -i\mathbf{p}^{-1}\not{\partial},$$

donde $\mathbf{p}^{-1} = \sqrt{-\partial^{-2}}$ y ∂^{-2} es la inversa de ∂^2 ; mientras que en un espacio tiempo curvo⁴ resulta $\mathbf{p}^{-1} = \sqrt{-\not{\nabla}^{-2}}$. Entonces, para un espacio-tiempo general

$$(1.86) \quad \mathcal{P} = \frac{1}{2}(1 + i\gamma^5)\mathcal{P}_0 + \frac{1}{2}(1 - i\gamma^5)\bar{\mathcal{P}}_0, \quad \text{con} \quad \mathcal{P}_0 = -i\mathbf{p}^{-1}\not{\nabla} = -i\nabla\mathbf{p}^{-1}.$$

⁴No es inmediatamente obvio que en un espacio-tiempo curvo la extensión de $\mathbf{p}^{-1}$ conmute con $\not{\nabla}$. Para probar que esto es así consideremos autoestados de $-i\nabla$, es decir $-i\nabla\psi_z(x^\mu; s) = -iz\psi_z(x^\mu; s)$, para algún $z \in \mathbb{C}$ y multiplicidad s . Pero $\mathbf{p}^2\psi_z(x^\mu; s) = -z^2\psi_z(x^\mu; s)$. Tomando $z = Re^{i\Theta}$ elegimos la rama de tal forma que $\mathbf{p}\psi_z(x^\mu; s) = -\varepsilon i z\psi_z(x^\mu; s)$, donde $\varepsilon = -1$ para $0 < \Theta \leq \pi$ y $\varepsilon = +1$ para $-\pi < \Theta \leq 0$. Así, en un espacio-tiempo general $\mathbf{p}^{-1}\psi_z(x^\mu; s) = i\varepsilon z^{-1}\psi_z(x^\mu; s)$ y, dado que $\mathbf{p}^{-1}$ y $\not{\nabla}$ tienen los mismos autoestados (por definición) entonces conmutan. Por lo tanto, $\mathcal{P}_0\psi_z(x^\mu; s) = \varepsilon\psi_z(x^\mu; s)$ donde

$$\varepsilon = \begin{cases} -\text{sign}(\arg(z)) & \text{si } -\pi < \arg(z) \leq \pi \\ +1 & \text{si } \arg(z) = 0 \end{cases}$$

En un espacio tiempo general $\mathcal{P}$ conmuta con ∇^2 , pero no con ∇^2 . Por lo tanto, la estructura deseada para la acción de un espinor no estándar invariante de Lorentz, con fuentes arbitrarias $\mathcal{J}$ y $\bar{\mathcal{J}}$ es

$$(1.87) \quad \mathcal{L}_{NSS} \equiv (\bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla})(\nabla \Psi) - m_{\Psi}^2 \bar{\Psi} \Psi - \bar{\chi}(\mathcal{P}_-) \Psi - \bar{\Psi}(\overleftarrow{\mathcal{P}}_-) \chi + \bar{\mathcal{J}} \Psi + \bar{\Psi} \mathcal{J}.$$

1.2.4. Cosmología de los campos ELKO en 4D

En esta sección construiremos el tensor energía-impulso sobre la base de las acciones vistas anteriormente sin tener en cuenta términos de interacción. Necesitamos variar la Lagrangiana con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$. En trabajos previos la dependencia de las conexiones respecto de la métrica era despreciada. Vale la pena notar que se podría comenzar con la Lagrangiana efectiva de un campo escalar que contiene una masa dependiente del parámetro de Hubble para reproducir resultados previos. En el Apéndice [A] desarrollaremos explícitamente los cálculos que conducen al tensor energía-impulso para las dos posibles acciones, $\mathcal{S}_{\Psi}^{(1)}$ y $\mathcal{S}_{\Psi}^{(2)}$ con densidades Lagrangianas $\mathcal{L}_{\Psi}^{(1)} + \mathcal{L}_P$ y $\mathcal{L}_{\Psi}^{(2)} + \mathcal{L}_P$, donde $\mathcal{L}_{\Psi}^{(1)}$, $\mathcal{L}_{\Psi}^{(2)}$ están dadas por (1.71) y (1.72) respectivamente. Dado que $\mathcal{P}$ es además un operador no-local, su dependencia en $g_{\mu\nu}$ suele ser extremadamente complicada, por lo que es difícil obtener una expresión para $T_{\Psi}^{\mu\nu}$. Para ciertas métricas y con una adecuada elección de $\mathcal{P}$, resulta $\frac{\delta \mathcal{S}_{\Psi}}{\delta \mathcal{P}} = 0$ y se puede obtener explícitamente $T_{\Psi}^{\mu\nu}$. Como dijimos, la presencia de $\mathcal{P}$, que en general tiene una dependencia complicada en la métrica, nos impide evaluar explícitamente $T_{\Psi}^{\mu\nu}$ excepto en aquellos casos que $[L_{\Psi}, \mathcal{P}] = 0$ [ver Apéndice A], o sea, cuando los términos que dependen de $\mathcal{P}$ se pueden eliminar. Así, podemos enfocarnos en el caso relativamente simple de un espacio-tiempo FLRW (Friedman-Lemaître-Robertson-Walker) espacialmente plano con elemento de línea

$$(1.88) \quad ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\mathbf{x}^2.$$

En este caso las conexiones de espín son

$$(1.89) \quad \begin{aligned} \Gamma_0 &= 0, \\ \Gamma_i &= -\frac{\dot{a}}{2} \gamma^0 \gamma^i. \end{aligned}$$

Volvemos a remarcar que una expresión completa y explícita del tensor $T_{\Psi}^{\mu\nu}$ es difícil de obtener ya que debería incluir un término que proviene de la variación de $\mathcal{P}$. Trabajos previos en cosmología de espinores ELKO han eludido este problema estudiando la cosmología de una teoría definida por la siguiente acción efectiva

$$(1.90) \quad \mathcal{L}_{\text{cosmo}} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}_{\mu} \nabla^{\mu} \Psi - V(\bar{\Psi} \Psi),$$

la cual es equivalente a (1.72) salvo en la normalización del término cinético, que no altera la física de nuestro problema. El término de proyección adicional $\mathcal{L}_P$ no fue tomado en cuenta en estudios previos de la cosmología de los ELKOs. Todos los términos que violan la invariancia de Lorentz se encuentran precisamente en $\mathcal{L}_P$ y son responsables de crear los problemas en derivar una expresión explícita para el tensor de energía-impulso. Analizar un campo NSS sin estos términos es directo. Formalmente, sin embargo, $\mathcal{L}_P$ no es opcional ya que se requiere para extraer los “modos ghosts”, que de otra forma producirían una teoría cuántica inestable.

De los cálculos realizados en el Apéndice [A] y tomando en cuenta la normalización del término cinético resulta:

$$(1.91) \quad \begin{aligned} T_{\text{cosmo}}^{\mu\nu} &= \bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}^{(\mu} \nabla^{\nu)} \Psi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{cosmo}} + \frac{1}{2} \nabla_{\rho} \mathcal{J}^{\mu\nu\rho}, \\ \mathcal{J}^{\mu\nu\rho} &= -\frac{i}{2} \left[\bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}^{(\mu} f^{\nu)\rho} \Psi + \bar{\Psi} f^{\rho(\mu} \nabla^{\nu)} \Psi \right]. \end{aligned}$$

El término $\nabla_\rho \mathcal{J}^{\mu\nu\rho}$ no aparece en estudios previos de estos espinores, al no tener en cuenta la variación de la conexión de espín respecto de la métrica.

Definimos $\Psi = \varphi \xi$ donde ξ es un espinor constante. En este caso podría ocurrir que $\bar{\xi}\xi > 0$, $\bar{\xi}\xi = 0$ o $\bar{\xi}\xi < 0$ con $\xi \neq 0$. Sin embargo, las últimas dos resultan en soluciones de energía no-positiva (ghosts), así que nos concentraremos en la primera. Para esto fijamos la definición de φ tomando $\bar{\xi}\xi = 1$. Notamos que $\mathcal{J}^{\mu\nu\rho} = \tilde{\mathcal{J}}^{(\mu\nu)\rho}$ donde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}_\mu{}^{\nu\rho} e_\nu^a e_\rho^b &\equiv \mathcal{J}_\mu{}^{ab} = -\frac{i}{2} \left[\bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}_\mu f^{ab} \Psi - \bar{\Psi} f^{ab} \nabla_\mu \Psi \right], \\ &= -\frac{i\varphi^2}{2} \left[\bar{\xi} \Gamma_\mu f^{ab} \xi + \bar{\xi} f^{ab} \Gamma_\mu \xi \right]. \end{aligned}$$

Es directa la relación $\tilde{\mathcal{J}}_\mu{}^{ab} = -\tilde{\mathcal{J}}_\mu{}^{ba}$, y al cumplirse (1.89) resulta $\tilde{\mathcal{J}}_0{}^{ab} = 0$. Redefinimos aquí $\Gamma_\mu = \frac{i}{4} \omega_\mu{}^{ab} f_{ab}$ de tal forma que $f^{ab} = \frac{i}{2} [\gamma^a, \gamma^b] = 2i\sigma^{ab}$. Ahora $f^{0j} = i\gamma^0 \gamma^j$, entonces

$$(1.92) \quad \tilde{\mathcal{J}}_i{}^{0j} = -\tilde{\mathcal{J}}_i{}^{j0} = -\frac{\varphi^2 \dot{a}}{4} \left[\bar{\xi} (\gamma^0 \gamma_i \gamma^0 \gamma^j + \gamma^0 \gamma^j \gamma^0 \gamma_i) \xi \right] = -\frac{\varphi^2 \dot{a}}{2} \delta_i^j.$$

Podemos escribir $f^{jk} = \epsilon_i{}^{jk} \sigma^i \mathbb{1}_{4 \times 4}$ resultando $(\gamma^0 \gamma^i f^{jk} + f^{jk} \gamma^0 \gamma^i) = 2\epsilon^{ijk} \gamma^5$. De aquí obtenemos

$$(1.93) \quad \tilde{\mathcal{J}}_i{}^{jk} = \frac{i\varphi^2 \dot{a}}{4} \left[\bar{\xi} (\gamma^0 \gamma_i f^{jk} + f^{jk} \gamma^0 \gamma_i) \xi \right] = i \frac{\varphi^2 \dot{a}}{2} \epsilon_i{}^{jk} \bar{\xi} \gamma^5 \xi.$$

Así, las únicas componentes de $\mathcal{J}^{\mu\nu\rho}$ que no se anulan son

$$\mathcal{J}^{i0}{}_j = \mathcal{J}^{0i}{}_j = \frac{\varphi^2 \dot{a}}{4a^3} \delta_j^i, \quad \mathcal{J}^i{}_j{}^0 = -\frac{\varphi^2 \dot{a}}{2a^3} \delta_j^i.$$

Definiendo $F^{\mu\nu} = F^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} \nabla_\rho \mathcal{J}^{(\mu\nu)\rho}$, podemos encontrar sus componentes no nulas

$$(1.94) \quad \begin{aligned} F^0{}_0 &= \frac{3\dot{a}^2}{4a^2} \varphi^2, \\ F^i{}_j &= \frac{1}{4a^2} \delta_j^i \frac{d}{dt} [a^3 \dot{a} \varphi^2]. \end{aligned}$$

Ahora podemos escribir las componentes del tensor energía-impulso

$$(1.95) \quad \begin{aligned} T^0{}_0 &= \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi^2) + \frac{3\dot{a}^2}{8a^2} \varphi^2, \\ T^i{}_j &= \delta_j^i \left\{ \frac{3\dot{a}^2}{8a^2} \varphi^2 + V(\varphi^2) - \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\dot{a}}{a} \varphi^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Definimos implícitamente la densidad de energía ρ_φ y la presión p_φ del campo por medio de las componentes diagonales de $T^\mu{}_\nu = \text{diag}(\rho_\varphi, -p_\varphi, -p_\varphi, -p_\varphi)$, obteniendo

$$(1.96) \quad \rho_\varphi = \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi^2) \right] + \frac{3}{8} H^2 \varphi^2,$$

$$(1.97) \quad p_\varphi = \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi^2) \right] - \frac{3}{8} H^2 \varphi^2 - \frac{1}{4} \dot{H} \varphi^2 - \frac{1}{2} H \varphi \dot{\varphi}.$$

Ahora se puede comprobar fácilmente que $\dot{\rho}_\varphi + 3H(\rho_\varphi + p_\varphi) = 0$ implica, como debe ser, que la ecuación de campo para φ es

$$(1.98) \quad \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + 2\varphi V'(\varphi^2) - \frac{3}{4} H^2 \varphi = 0.$$

Sabemos que la ecuación de Friedmann (sin fuentes de materia) para la densidad del campo φ es

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8}{3}\pi G \rho_\varphi = \frac{8}{3}\pi G \left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi^2) \right] + \pi G H^2 \varphi^2, \\ H^2 - \pi G H^2 \varphi^2 &= \frac{8}{3}\pi G \left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi^2) \right], \\ (1.99) \quad H^2 &= \frac{8\pi}{3} \frac{G}{(1 - \pi G \varphi^2)} \left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi^2) \right]. \end{aligned}$$

Podemos interpretar esta última tomando una constante de acoplamiento gravitacional efectiva $G_{eff} = \frac{G}{(1 - \pi G \varphi^2)}$, la cual pone un límite máximo $\varphi < 1/\sqrt{\pi G} = 2\sqrt{2} m_{PE}$, donde $m_{PE} = 1/\sqrt{8\pi G}$ es la masa de Planck reducida. Se trata de un modelo ELKO sin término de proyección aunque el campo es invariante de Lorentz y libre de ghosts.

1.2.5. Cosmología de los campos NSS invariantes de Lorentz

Desarrollaremos a continuación la cosmología de espinores no-estándar invariantes de Lorentz (NSS), partiendo de la definición de $\mathcal{P}$, ecuación (1.86).

A su vez, nos concentraremos en la acción dada por la ecuación (1.87), dado que el operador $\mathcal{P}$ conmuta con ∇^2 . Esta elección de término cinético no introduce ninguna modificación en la constante de gravitación efectiva. La diferencia en este caso es que cuando $V' = m^2$ recuperamos la formulación estándar de Dirac para espinores en un espacio general y sin ghosts. En un espacio-tiempo FRW espacialmente plano se cumplen (1.89), entonces $-\gamma^\mu \Gamma_\mu = \frac{3a}{2a}$, por lo tanto

$$(1.100) \quad \nabla \Psi = a^{-3/2} \not{\partial} (a^{3/2} \Psi),$$

$$(1.101) \quad \mathcal{P} \Psi = a^{-3/2} \mathcal{P}^{\text{plano}} (a^{3/2} \Psi),$$

donde $\mathcal{P}^{\text{plano}} = (1 + i\gamma^5) \mathcal{P}_0^{\text{plano}} + (1 - i\gamma^5) \bar{\mathcal{P}}_0^{\text{plano}}$, $\mathcal{P}_0^{\text{plano}} = -i \mathbf{p}^{-1} \not{\partial}$ y $\mathbf{p}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{-\partial^2}}$.

La acción NSS invariante de Lorentz es

$$\begin{aligned} (1.102) \quad \mathcal{S}_\Psi &= \int \sqrt{-g} d^4x \left[\bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla} \nabla \Psi - V(\bar{\Psi} \Psi) - \bar{\chi} (\mathcal{P}_-) \Psi - \bar{\Psi} (\overleftarrow{\mathcal{P}}_-) \chi \right] \\ &= \int d^3x \int dt \left[\bar{\Omega} \overleftarrow{\not{\partial}} \not{\partial} \Omega - a^3 V(a^{-3} \bar{\Omega} \Omega) - \bar{X} (\mathcal{P}_-^{\text{plano}}) \Omega - \bar{\Omega} (\overleftarrow{\mathcal{P}}_-^{\text{plano}}) X \right]. \end{aligned}$$

donde $\Omega = a^{3/2} \Psi$ y $X = a^{3/2} \chi$. Si definimos $\Lambda = \bar{\Omega} \Omega$, con $\Phi = a^{-3} \Lambda$ y variamos la acción con respecto a a , obtenemos

$$(1.103) \quad 3H^2 + 2\dot{H} = \kappa [V(\Phi) - V'(\Phi) \Phi].$$

Bajo el ansatz $\Psi = \Psi(t)$, encontramos que $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ y $\mathcal{P}^{\text{plano}} = \mathcal{P}_0^{\text{plano}}$. Las ecuaciones para los campos Ω y $\bar{\Omega}$ son entonces

$$(1.104) \quad \Omega = \Omega_+, \quad \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_+,$$

y

$$(1.105) \quad \ddot{\Omega} + V'(\Phi) \Omega = X_-, \quad \ddot{\bar{\Omega}} + V'(\Phi) \bar{\Omega} = \bar{X}_-.$$

Aquí definimos $\tilde{\theta} = \dot{\bar{\Omega}} \Omega$ y $\theta = a^{-3} \tilde{\theta}$. Nos quedan entonces las siguientes ecuaciones acopladas:

$$(1.106) \quad \ddot{\Lambda} = 2 [\tilde{\theta} - V'(\Phi) \Lambda],$$

$$(1.107) \quad \dot{\tilde{\theta}} = -V'(\Phi) \dot{\Lambda}.$$

Las condiciones para la proyección requieren que el campo Ψ tenga la siguiente forma:

$$(1.108) \quad \Psi_+ = a^{-3/2} \sum_{\omega, k \geq 0} \begin{pmatrix} e^{-ikt} [A_+(\omega, k)e^{\omega t} + A_-(\omega, k)e^{-\omega t}] \\ e^{-ikt} [B_+(\omega, k)e^{\omega t} + B_-(\omega, k)e^{-\omega t}] \\ e^{+ikt} [C_+(\omega, k)e^{\omega t} + C_-(\omega, k)e^{-\omega t}] \\ e^{+ikt} [D_+(\omega, k)e^{\omega t} + D_-(\omega, k)e^{-\omega t}] \end{pmatrix},$$

donde $A_+(0, k) = B_+(0, k) = C_-(0, k) = D_-(0, k) = 0$ y $A_-(\omega, 0) = B_-(\omega, 0) = C_+(\omega, 0) = D_+(\omega, 0) = 0$.

Cuando $V'(\Phi) \equiv V'_0 = Cte.$, las soluciones a la ecuación del campo Ψ son del tipo $e^{\pm i\sqrt{V'_0}t}$. Usando la forma de Ψ forzada por la condición de proyección (1.108), se puede verificar que

$$(1.109) \quad \tilde{\theta} = \|V'_0\|\Lambda \quad \text{y} \quad \Lambda \geq 0.$$

Combinando estas últimas con la ecuación (1.107) tenemos que $V'_0 > 0$, lo que implica $\dot{\Lambda} = 0$. Si ocurriese que $V' < 0$ no habría restricciones adicionales sobre $\dot{\Lambda}$.

Podemos escribir entonces la ecuación de Friedmann sin fuentes de materia

$$(1.110) \quad H^2 = \frac{\kappa}{3} [\theta + V(\Phi)].$$

Así, la densidad de energía ρ_Ψ y la presión p_Ψ se pueden escribir como

$$(1.111) \quad \rho_\Psi = \theta + V(\Phi),$$

$$(1.112) \quad p_\Psi = V'(\Phi)\Phi - V(\Phi).$$

Cuando $V(\Phi) = m^2\Phi = m^2\bar{\Psi}\Psi$ tendremos además $p_\Psi = 0$ y los campos NSS evolucionarán como polvo, es decir, $\rho_\Psi \propto a^{-3}$. Como $V' = m^2 = Cte.$ y $\theta = |m^2| \Phi \propto a^{-3}$, si $m^2 > 0$ entonces $\rho_\Psi = 2m^2\Phi \propto a^{-3} \geq 0$ mientras que si $m^2 < 0$, $\rho_\Psi = 0 = p_\Psi$. De esta forma la condición de proyección nos asegura la positividad de la energía potencial, y de paso $\rho_\Psi \geq 0$.

Consideremos que se requiere para que existan soluciones tipo de-Sitter donde $p_\Psi = -\rho_\Psi$, tal que $\rho_\Psi \neq 0$. Conviene distinguir entre soluciones triviales donde la densidad efectiva de energía oscura sea $\rho_{eo} = V_0$ y no triviales, donde $\rho_{eo} > V_0$. Todas las soluciones no triviales representan un “condensado de espinores cosmológico”, donde $\Phi = \Phi_0 > 0$.

Las ecuaciones (1.111) y (1.112), nos dicen que la condición $p_\Psi = -\rho_\Psi$ implica que $\tilde{\theta} = -V'(\Phi)\Lambda$. Derivando esta relación y usando la ecuación (1.107) nos da $V'(\Phi) = Cte.$ Existen aquí dos posibilidades; si $V'' = 0$, $V(\Phi) = V_0 + V'_0\Phi$ y tendremos $p_\Psi = -V_0$, es decir $\rho_\Psi = V_0$ por lo que la solución es nuevamente trivial y aparte de la contribución del término constante en V , la energía del campo NSS se desvanece. El caso con $V'' \neq 0$, si bien presenta gran interés va más allá del espíritu de esta tesis, por lo que se recomienda ver (Böhmer et al., 2010).

Capítulo 2

Teorías de Materia Inducida y formulación espinorial en 5D.

En este capítulo se explican los fundamentos y la base histórica de la teoría llamada Espacio-Tiempo-Materia (Wesson, 2007; Wesson y Ponce de León, 1992; Wesson, 2006, 1999), a partir de su aparición y construcción como un medio de unificación de la gravedad con otras interacciones de la naturaleza relacionadas con la versión moderna de la Teoría de Kaluza-Klein. En general las teorías de campo pentadimensionales son particularmente útiles, como extensión natural del espacio-tiempo tetradimensional de la gravedad de Einstein, y como límite de baja energía de teorías en más dimensiones orientadas al estudio de las interacciones entre partículas. Theodor Kaluza (Kaluza, 1921) y Oscar Klein (Klein, 1926a,b) encontraron una forma de obtener una teoría unificada de Relatividad General y electromagnetismo sobre una variedad pseudo-Riemanniana pentadimensional, a la que dotaron de coordenadas $(t, \vec{r}, \psi)$. Ambas interacciones se ven descritas en la métrica asociada a la variedad pentadimensional. Si bien esta teoría en su formulación original es incorrecta la importancia de sus ideas sigue siendo enorme debido a su naturaleza fundacional en el tema, ya que conforma la primera concepción de una teoría sobre 5D y aporta una forma práctica de introducir los campos físicos no asociados a gravedad desde herramientas puramente geométricas. Desde entonces, son muchos los trabajos que han llegado a nuestros días como modificaciones o extensiones a dichas teorías; es así que esta vertiente ha dado origen por ejemplo a las Teorías de Cuerdas y de branas que conforman el génesis de las de Supercuerdas y Supergravedad.

Las teorías modernas difieren de la idea de Kaluza-Klein (KK) en muchos aspectos. Por ejemplo, suele darse una topología no-compacta a la quinta coordenada, lo que tiene consecuencias observables en el comportamiento de la materia en 4D. También se puede tratar de incluir el comportamiento de los campos de una forma más sutil que su mera inclusión como parte de un ente con significado geométrico. Entre las teorías que toman en cuenta estos dos puntos se encuentra la Teoría Espacio-Tiempo-Materia (STM, por sus siglas en inglés Space-Time-Matter), que es una de las formulaciones pentadimensionales no-compactas con fundamentos en el Teorema de Campbell-Magaard (Campbell, 1926; Magaard, 1963; Dahia y Romero, 2002a,b). El teorema de Campbell-Magaard básicamente nos dice que toda variedad N -dimensional libre de singularidades puede ser locale isometricamente embebida en una variedad $(N + 1)$ -dimensional de tipo Einstein. Entendemos por variedad de tipo Einstein aquella cuyo tensor de curvatura de Ricci se relaciona con el tensor métrico según la expresión $R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$. Es particularmente interesante el caso $\lambda = 0$, en que la variedad pentadimensional es Ricci-plana. Inmediatamente podemos decir que el tensor de Einstein del caso es idénticamente nulo, lo que representa y define un vacío material. Este es un importante punto de partida que permite que podamos lograr una descripción de la materia 4D desde el vacío pentadimensional, y no a partir de cierto estado más o menos caprichoso y establecido *ad hoc*. Esto resulta un elemento fundamental de las teorías de tipo STM que nos provee de una receta clara y simple a la hora de establecer las características

del espacio con dimensiones extra en que definimos un vacío de materia: este debe ser al menos Ricci-plano. Cabe mencionar, sobre todo como una forma de reconocimiento, que si bien el primer intento de unificar la Teoría General de la Relatividad y el electromagnetismo a través de dimensiones extra es de Kaluza, ya en 1914 Gunnar Nordström había abordado el problema de unificación sobre dimensiones extra en una teoría gravitatoria no tensorial. Nordström propuso trabajar con un penta-potencial vector, donde las primeras cuatro componentes corresponden al potencial vector electromagnético y la última componente al potencial gravitatorio Newtoniano. El mismo Nordström abandonó esta línea al conocer la Teoría General de la Relatividad, pero de todos modos nos legó la idea germinal de un pentapotencial vector.

2.1. Teorías Espacio-Tiempo-Materia (STM).

Estas teorías fueron desarrolladas por Paul Wesson y Jaime Ponce de León (Ponce de León, 2001b, 2002) en la década de 1980, y explican las propiedades de la materia como una consecuencia del vacío geométrico en 5D. A diferencia de las viejas teorías KK todos los coeficientes métricos dependen de la quinta coordenada no-compacta ψ , y pueden entonces definirse adecuadamente cantidades relacionadas con la materia a partir de ψ y sus derivadas. El paso de 5D a 4D se efectúa habitualmente por medio de una foliación $\psi = \psi_0 = Cte$. La teoría STM es tratada por Des J. Mc Manus (McManus, 1994) para el caso de una subfamilia particular de las métricas 4D tipo Friedman-Robertson-Walker (FRW) o intrínsecamente FRW, es decir para el caso cosmológico. Utiliza como punto de partida las ecuaciones de Einstein 5D de un vacío aparente, ${}^{(5)}G_{AB} = 0$, donde $c = 8\pi G = 1$ y se propone como objetivo obtener las mismas en 4D, ${}^{(4)}G_{\alpha\beta} = {}^{(4)}T_{\alpha\beta}$ utilizando la métrica 5D

$$(2.1) \quad dS^2 = -e^{2A} dt^2 + \left(1 + \frac{k}{4} r^2\right)^{-2} e^{2B} d\vec{r}^2 + e^{2C} d\psi^2,$$

donde A, B, C son coeficientes que dependen de t y ψ . Además, la curvatura espacial toma valores $k = -1, 0, +1$ para universos abiertos, planos o cerrados respectivamente.

La métrica resultante de la foliación $\psi = \psi_0 = Cte$. para la hipersuperficie 4D, es

$$(2.2) \quad d\sigma^2 = -e^{2A} dt^2 + \left(1 + \frac{k}{4} r^2\right)^{-2} e^{2B} d\vec{r}^2.$$

Si $e^{2A} = 1$ y $e^{2B} = a^2(t)$, estamos ante una métrica de FRW. De no ser así, mediante el cambio de variables $\tau = \int e^A dt$, $R = \int \frac{dr}{1 + \frac{k}{4} r^2}$ obtenemos una métrica de FRW a la que corresponde $e^{2B} = a^2(t(\tau))$.

2.1.1. Núcleo de la teoría.

Para desarrollar el aspecto central de las ideas que gobiernan las teorías STM vamos a tomar la métrica (2.1) propuesta por Mc Manus y a plantear las ecuaciones de Einstein de vacío en 5D, redefiniendo después p y ρ en función de cantidades asociadas a la quinta coordenada ψ y sus derivadas. En nuestro caso esas cantidades serán el coeficiente C , derivadas temporales de C y derivadas respecto de ψ . Así veremos surgir la dinámica de un universo 4D material a partir de un espacio 5D vacío. Es decir que veremos a la materia siendo inducida por fuentes propias del vacío pentadimensional.

Para la métrica (2.2), con $c = 8\pi G = 1$, las ecuaciones asociadas al tensor de energía-impulso dado para un fluido perfecto resultan

$$(2.3) \quad {}^{(4)}G^0_0 = 3 \left[e^{-2A} \dot{B}^2 + k e^{-2B} \right] = \rho,$$

$$(2.4) \quad {}^{(4)}G^1_1 = - \left[e^{-2A} \left(2\dot{A}\dot{B} - 3\dot{B}^2 - 2\ddot{B} \right) - e^{-2B} \right] = -p,$$

de modo que éstas ρ y p satisfacen (2.3) y (2.4), por ser la métrica intrínsecamente FRW. Ahora escribiremos (2.3) y (2.4) con fuentes que provienen de la quinta coordenada de un espacio 5D vacío. De este modo se induce la materia del universo en 4D. Las ecuaciones de Einstein de vacío para la métrica (2.1), considerando los coeficientes A, B, C como funciones de t y de ψ , con $k = -1, 0, +1$ y denotando $\frac{\partial A}{\partial \psi} = A'$, son

$$(2.5) \quad {}^{(5)}G^0_0 = 3 \left[e^{-2C} (2B'^2 - B'C' + B'') - e^{-2A} \dot{B}\dot{C} \right] - 3 \left[e^{-2A} \dot{B}^2 + k e^{-2B} \right] = 0,$$

$$(2.6) \quad {}^{(5)}G^1_1 = \left[e^{-2C} (A'^2 + 2A'B' - A'C' + A'' + 3B'^2 - 2B'C' + 2B'') + e^{-2A} \right. \\ \left. (\dot{A}\dot{C} - 2\dot{B}\dot{C} - \dot{C}^2 - \ddot{C}) \right] + \left[e^{-2A} (2\dot{A}\dot{B} - 3\dot{B}^2 - \ddot{B}) - k e^{-2B} \right] = 0,$$

$$(2.7) \quad {}^{(5)}G^0_4 = 3e^{-2A} (\dot{B}' + \dot{B}^2 B'' - B'\dot{C}) = 0,$$

$$(2.8) \quad {}^{(5)}G^4_4 = 3e^{-2A} (\dot{A}\dot{B} - 2\dot{B}^2 - \ddot{B}) + 3e^{-2C} (A'B' + B'^2) - 2k e^{-2B} = 0.$$

Dada la isotropía del espacio se tiene que, ${}^{(5)}G^1_1 = {}^{(5)}G^2_2 = {}^{(5)}G^3_3$ y además se cumple que, ${}^{(5)}G^0_1 = {}^{(5)}G^0_2 = {}^{(5)}G^0_3 = 0$.

Comparando las ecuaciones (2.3) y (2.5) vemos que el último término de ${}^{(5)}G^0_0$ es justamente la expresión de la densidad de energía en el universo 4D. Nuevamente, cotejando (2.4) y (2.6) resulta claro que el último término de ${}^{(5)}G^1_1$ es la expresión obtenida en el universo 4D para la presión. Podemos expresar entonces ρ y p por

$$(2.9) \quad \rho = 3 \left[e^{-2C} (2B'^2 - B'C' + B'') - e^{-2A} \dot{B}\dot{C} \right]$$

$$(2.10) \quad p = - \left[e^{-2C} (A'^2 + 2A'B' - A'C' + A'' + 3B'^2 - 2B'C' + 2B'') + e^{-2A} (\dot{A}\dot{C} - 2\dot{B}\dot{C} - \dot{C}^2 - \ddot{C}) \right].$$

Todos los términos en las expresiones de p y ρ están dados en función de la componente adicional del tensor métrico g_{44} o de derivadas de elementos del tensor métrico respecto de la coordenada extra. Asociando un tensor de energía-impulso de vacío ${}^{(5)}T_{ij} = 0$ al espacio 5D se induce entonces una dinámica para el espacio en 4D con un tensor de energía-impulso propio de un gas perfecto, obteniéndose las expresiones de presión y densidad de energía desde el vacío en 5D. El hecho de que deban cumplirse las condiciones (2.7) y (2.8) impone una restricción sobre las métricas en que es factible utilizar la condición de vacío, remitiéndonos como resultado a una subclase de las métricas de FRW.

Un ejemplo particular que sirve para describir el vacío pentadimensional y que satisface las condiciones (2.7) y (2.8), resultando directamente de sus ecuaciones de Einstein que ${}^{(5)}G^A_B = 0$ (Bellini, 2006), es

$$(2.11) \quad dS^2 = \psi^2 \frac{\Lambda(t)}{3} dt^2 - \psi^2 e^{2 \int dt \sqrt{\Lambda(t)/3}} d\vec{r}^2 - d\psi^2.$$

Esta métrica es Riemann plana y, en este caso la curvatura espacial k es nula. Además, se tiene

$$(2.12) \quad e^{2A} = \frac{\psi^2 \Lambda}{3},$$

$$(2.13) \quad e^{2B} = \psi^2 e^{2 \int dt \sqrt{\Lambda(t)/3}},$$

$$(2.14) \quad e^C = 1.$$

De acuerdo a las ecuaciones (2.9) y (2.10), conducen a las siguientes expresiones para ρ y p sobre la foliación $\psi := \psi_0$

$$(2.15) \quad \rho = 3\psi_0^{-2},$$

$$(2.16) \quad p = -3\psi_0^{-2}.$$

Claramente ambas son constantes y responden a una ecuación de estado

$$(2.17) \quad p = \omega \rho,$$

en la que $\omega = -1$. El caso $\Lambda = \frac{3}{\psi_0^2}$ representa el comportamiento típico de un modelo inflacionario del tipo de Sitter, con un parámetro de Hubble $H = \frac{1}{\psi_0}$, en el que la expansión es totalmente dada por la constante cosmológica Λ .

2.1.2. Algunas cuestiones sobre la foliación.

La foliación es la herramienta con que vinculamos nuestra variedad pentadimensional con el espacio-tiempo tetradimensional. Consiste en general en imponer sobre las coordenadas una relación del tipo: $f(x^1, x^2, \dots, x^m) = 0$. La expresión más sencilla de la antedicha relación es la llamada foliación constante que fija algunas de las coordenadas en un valor determinado mediante una relación del tipo $x^i - x^0 = 0$, donde x^i es la i -ésima coordenada y x^0 es un valor fijo. Una foliación que no es constante se dice dinámica. Claramente una foliación que resulta constante en determinado sistema de coordenadas, puede ser dinámica en otro sistema y viceversa. Un ejemplo sencillo e ilustrativo puede darse si pensamos en $\mathbb{R}^3$ como variedad tridimensional e imponemos la foliación $x^2 + y^2 + z^2 - r_0^2 = 0$. En coordenadas cartesianas obtendremos una nueva variedad bidimensional: la cáscara esférica de radio unidad. En este caso la foliación resulta dinámica en coordenadas cartesianas, pero estática en coordenadas esféricas, en cuyo caso la expresión se reduce a $r - r_0 = 0$. En general podemos abordar de modo un poco diferente la foliación, esto es a través de la relación entre la variedad, que llamaremos $\mathcal{M}$ y su espacio tangente. Cada variedad suave $\mathcal{M}$ tiene bien determinado en cada uno de sus puntos un espacio tangente (asociado al punto correspondiente) que llamaremos $T_p\mathcal{M}$. Este espacio tangente es un espacio vectorial de la misma dimensión que la variedad, digamos m . Puede verse a la foliación como la supresión de uno de los elementos de una base adecuada del espacio tangente en cada punto y la reconstrucción de la variedad integral a los nuevos espacios tangentes de dimensión $m - 1$.

2.2. Fundamentos de las teorías STM: El teorema de Campbell-Magaard

La teoría abstracta de los embebimientos data al menos de 1868, con el trabajo original de Riemann. En la extensión a 5D de la Relatividad General, por Kaluza en 1921 y Klein en 1926, la aplicación de embebimientos fue implícita. La primera aplicación explícita de embebimientos vino con el trabajo de Campbell en 1926 (Campbell, 1926). Las aplicaciones posteriores de esta herramienta sólo fueron esporádicas. El problema más general de como embeber cualquier solución de la teoría de Einstein en un espacio plano de mayor dimensión N , se puede probar que requiere $N \geq 10$. Este resultado se basa en el trabajo de Schläfli, Janet, Cartan y Burstín (Spivak, 1979; Burstín, 1931). Este último muestra la importancia de las ecuaciones de Gauss-Codazzi como condiciones de integrabilidad para los embebimientos, algo sobre lo que volveremos luego.

Como ya hemos mencionado, fue Campbell quien notó la importancia del embebimiento de espacios 4D del tipo usado en Relatividad General, en espacios 5D Ricci-planos. Esto produce las ecuaciones de campo más básicas que son relevantes en física. El teorema, que fue demostrado más tarde por Magaard (Magaard, 1963) actúa como protección algebraica para teorías de Relatividad en más dimensiones.

La posibilidad de que dimensiones más altas pudieran no ser compactificadas sólo fue tomada en serio por la comunidad física a partir de los años 90. La teoría STM data de 1992, y esencialmente utiliza la dimensión extra no compacta para dar cuenta del origen geométrico de la materia, como se ha discutido con anterioridad. Teoría de Membranas data de poco tiempo después, y supone que la dimensión extra no compacta es dividida por una hipersuperficie singular; explicando esto porque las interacciones entre partículas en la brana son más fuertes que la

gravidad, la cual se propaga fuera de ella. Mientras que esta última teoría tiene una motivación diferente, se sabe que puede establecerse una equivalencia entre ambas, al menos en ciertos casos (Ponce de León, 2001b, 2004).

2.2.1. El álgebra de los embebimientos

En esta sección, vamos a estudiar las propiedades de los espacios de Riemann ND, sin ideas preconcebidas relativas a la signatura, o si existe una superficie singular [como en teoría de Membranas] o no [como para STM]. El elemento geométrico principal de dicho espacio es el tensor de Ricci, el cual, por ser simétrico tiene $\frac{1}{2}N(N+1)$ componentes independientes. Utilizaremos una notación con sombrero para indicar cantidades que viven en el espacio de mayor dimensionalidad, por ejemplo $\widehat{R}_{AB}$, para distinguirlo del objeto que vive en el de una dimensión menor $R_{\alpha\beta}$. Dado que numeramos las coordenadas de 0 a n , la dimensión total del espacio es $N = n + 1$. Reservaremos los índices $A = 0, 1, 2, 3, 4$ para la geometría en 5D, mientras que $\alpha = 0, 1, 2, 3$ representarán la geometría en 4D. Diremos que $\mathcal{M}$ es cualquier variedad general, en la cual se incluye la hipersuperficie Σ_ℓ definida por la coordenada extra ℓ . Si Σ_ℓ poseyera algunas propiedades especiales la denotaremos por Σ_0 , que en 4D representaría nuestro espacio-tiempo. Adoptaremos unidades geométricas, es decir $c = G = 1$. La derivada covariante en 5D se representará por ∇_A , mientras que en 4D se reduce al usual punto y coma.

A la variedad $(n+1)$ -dimensional $(\mathcal{M}, g_{AB})$ la representaremos con un sistema de coordenadas $x = \{x^A\}$, siendo una coordenada tipo tiempo y n tipo espacio o bien, 2 tipo tiempo y $(n-1)$ tipo espacio, todas ellas tangentes a $\mathcal{M}$. La función escalar

$$\ell = \ell(x),$$

define nuestra foliación en la variedad de más dimensionalidad. Si hay una dirección tipo tiempo tangente a $\mathcal{M}$, supondremos que el vector n^A normal a Σ_ℓ será tipo espacio. Si hubiese dos direcciones tipo tiempo, el espacio tangente a Σ_ℓ contendría una dirección tipo tiempo y $(n-1)$ direcciones tipo espacio. En todos los casos la hipersuperficie Σ_ℓ correspondería a un espacio-tiempo Lorentziano. El vector normal a Σ_ℓ está dado por

$$(2.18) \quad n_A = \varepsilon \Phi \partial_A \ell, \quad n^A n_A = \varepsilon.$$

Aquí $\varepsilon = \pm 1$, mientras que el escalar Φ que normaliza a n^A se conoce como “función de lapso”. Definimos el tensor de proyección del tensor métrico g_{AB} sobre Σ_ℓ como

$$(2.19) \quad h_{AB} = g_{AB} - \varepsilon n_A n_B.$$

Este tensor es simétrico y ortogonal a n^A .

Establecemos un sistema coordenado $y \equiv \{y^\alpha\}$ n -dimensional en cada hipersuperficie Σ_ℓ . Así, los n vectores de la base resultan

$$(2.20) \quad e_\alpha^A = \frac{\partial x^A}{\partial y^\alpha}, \quad n_A e_\alpha^A = 0,$$

tal que los e_α^A son tangentes por definición a la hipersuperficie Σ_ℓ y ortogonales a n^A . Bajo transformación de coordenadas en $\mathcal{M}[\phi : x \rightarrow \bar{x}(x)]$, e_α^A se comporta como vector mientras que bajo transformación de coordenadas en $\Sigma_\ell[\psi : y \rightarrow \bar{y}(y)]$ se comporta como 1-forma. Sirven además para proyectar objetos de $\mathcal{M}$ en Σ_ℓ . Por ejemplo, se dice que $T_\alpha = e_\alpha^A T_A$ es la proyección de T_A en Σ_ℓ . La métrica inducida en las hipersuperficies Σ_ℓ está dada por

$$(2.21) \quad h_{\alpha\beta} = e_\alpha^A e_\beta^B g_{AB} = e_\alpha^A e_\beta^B h_{AB}.$$

La inversa cumple $h^{\alpha\beta}h_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$. Ambas pueden usarse para subir y bajar índices de tensores que sean tangentes a Σ_ℓ , y para cambiar la posición de los índices de la base e_α^A . Esto implica necesariamente que

$$(2.22) \quad e_\alpha^A e_\beta^A = \delta^\alpha_\beta.$$

Ahora introducimos la curvatura extrínseca de las hipersuperficies Σ_ℓ :

$$(2.23) \quad K_{\alpha\beta} = e_\alpha^A e_\beta^B (\nabla_A n_B) = \frac{1}{2} e_\alpha^A e_\beta^B \mathcal{L}_n h_{AB}.$$

Se puede tomar como la derivada de Lie de la métrica inducida en la dirección normal. Queda claro que $K_{\alpha\beta}$ es simétrica. Si $\{y, \ell\}$ define un sistema de coordenadas alternativo en $\mathcal{M}$ queda claro que

$$(2.24) \quad dx^A = e_\alpha^A dy^\alpha + \ell^A d\ell.$$

donde $\ell^A = \frac{\partial x^A}{\partial \ell}$ es el vector tangente a las líneas de $y^\alpha = Cte$. Así, siempre podemos descomponer vectores en 5D en la suma de una parte tangente a Σ_ℓ y una parte normal a Σ_ℓ . Para ℓ^A escribimos

$$(2.25) \quad \ell^A = N^\alpha e_\alpha^A + \Phi n^A.$$

Esta última es consistente con el hecho que $\ell^A \partial_A = 1$, requerida por las definiciones de ℓ^A y de n^A . El vector n-dimensional N^α se denomina “vector de desplazamiento”, y describe el cambio de la coordenada y^α al movernos entre las hipersuperficies Σ_ℓ . Finalmente podemos escribir la longitud de arco infinitesimal

$$(2.26) \quad \begin{aligned} dS^2 &= g_{AB} dx^A dx^B \\ &= h_{\alpha\beta} (dy^\alpha + N^\alpha d\ell) (dy^\beta + N^\beta d\ell) + \varepsilon \Phi^2 d\ell^2, \end{aligned}$$

la cual se reduce a $ds^2 = h_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$ si $d\ell = 0$, que es un caso de notable interés físico. A continuación obtendremos las ecuaciones de campo en cada hipersuperficie Σ_ℓ , siendo las ecuaciones n+1-dimensionales

$$(2.27) \quad \hat{R}_{AB} = \lambda g_{AB}, \quad \lambda = \frac{2\Lambda}{1-n}.$$

El término Λ es la constante cosmológica del espacio n+1-dimensional, que se puede hacer cero en la mayoría de los casos. En lo que sigue llamaremos espacios de Einstein a las variedades que satisfacen la ecuación (2.27). Comenzaremos con las ecuaciones de Gauss-Codazzi para cada hipersuperficie Σ_ℓ

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \hat{R}_{ABCD} e_\alpha^A e_\beta^B e_\gamma^C e_\delta^D &= R_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2\varepsilon K_{\alpha[\delta} K_{\gamma]\beta}, \\ \hat{R}_{MABC} n^M e_\alpha^A e_\beta^B e_\gamma^C &= 2K_{\alpha[\beta} K_{\gamma]}. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se combinan con el tensor de Ricci n+1-dimensional:

$$(2.29) \quad \hat{R}_{AB} = (h^{\mu\nu} e_\mu^M e_\nu^N + \varepsilon n^M n^N) \hat{R}_{AMBN}.$$

Las componentes de este tensor cumplen con un conjunto de condiciones expresadas por las contracciones de (2.27):

$$(2.30) \quad \begin{aligned} \hat{R}_{AB} e_\alpha^A e_\beta^B &= \lambda h_{\alpha\beta}, \\ \hat{R}_{AB} e_\alpha^A n^B &= 0, \\ \hat{R}_{AB} n^A n^B &= \varepsilon \lambda. \end{aligned}$$

Son $\frac{1}{2}n(n+1)$ ecuaciones para el primer miembro, n para el segundo y una relación escalar para la última. En total $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ ecuaciones. Introduciendo (2.29) en (2.30) y usando (2.28) obtenemos las siguientes relaciones:

$$(2.31) \quad \begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= \lambda h_{\alpha\beta} - \varepsilon [E_{\alpha\beta} + K_{\alpha}{}^{\mu} (K_{\beta\mu} - K h_{\beta\mu})], \\ 0 &= (K^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} K)_{;\alpha}, \\ \varepsilon \lambda &= E_{\mu\nu} h^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

En estas ecuaciones usamos las siguientes definiciones: $K \equiv h^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta} \equiv \hat{R}_{MANB} n^M e_{\alpha}^A n^N e_{\beta}^B$, $E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha}$. El tensor de Einstein $G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} R/2$ para una hipersuperficie Σ_{ℓ} está dado por

$$(2.32) \quad G^{\alpha\beta} = -\varepsilon \left(E^{\alpha\beta} + K^{\alpha}{}_{\mu} P^{\mu\beta} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} K^{\mu\nu} P_{\mu\nu} \right) + \lambda \left[1 - \frac{1}{2} (n + \varepsilon) \right] h^{\alpha\beta},$$

donde hemos definido la cantidad conservada sobre Σ_{ℓ}

$$(2.33) \quad \begin{aligned} P_{\alpha\beta} &\equiv K_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta} K, \\ P^{\alpha\beta}{}_{;\beta} &= 0, \end{aligned}$$

que tiene tetra divergencia nula.

Este tensor tiene las mismas propiedades algebraicas que el momento conjugado a la métrica inducida en la formulación ADM de la Relatividad General (Wald, 1984), aunque no es formalmente un momento canónico en el sentido Hamiltoniano. Aparece en materia inducida (Wesson y Ponce de León, 1992), en particular en el desarrollo de la teoría de membranas (Ponce de León, 2001b).

Debemos recordar que la condición de que el tensor de Einstein en 4D tenga tetra divergencia nula impone una condición sobre $E_{\alpha\beta}$. Usando el segundo miembro de (2.31) obtenemos

$$(2.34) \quad E^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \varepsilon \left(K_{\mu\nu} K^{\mu\nu;\alpha} - K^{\mu\beta} K^{\alpha}{}_{\mu;\beta} \right).$$

Esta última ecuación podría considerarse como un requerimiento que satisfacen las cantidades geométricas sobre las hipersuperficies Σ_{ℓ} descritas por (2.31), cuando se pide que las cantidades asociadas con la materia se conserven. Es decir, se muestra que las relaciones (2.31) son una formulación geométrica de las ecuaciones de campo para la relatividad en n dimensiones. En lo que sigue haremos uso de las ecuaciones de campo, donde extraeremos de ellas información física, suponiendo que es la hipersuperficie Σ_{ℓ} sobre la que experimentamos los procesos físicos. Es posible resolver el primer miembro de (2.31) para $E_{\alpha\beta}$ y sustituir el resultado en las restantes relaciones. El resultado que se obtiene es

$$(2.35) \quad (n-1)\lambda = R + \varepsilon (K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} - K^2).$$

Esta ecuación escalar junto con las n relaciones del segundo miembro de (2.31) nos dan generalizaciones $n+1$ -dimensionales de las restricciones al enfoque Hamiltoniano de la relatividad general. Aunque nosotros estamos interesados en su aplicación al caso 5D versus la física en 4D (embebidamiento), este enfoque es suficientemente general para ser usado en otros casos.

2.2.2. El teorema de Campbell-Magaard

Cualquier variedad n -dimensional puede ser local e isométricamente embebida en un espacio de Einstein $n+1$ -dimensional.

Con el álgebra establecida en la sección previa, demostraremos a continuación el teorema de Campbell-Magaard utilizando un enfoque heurístico que servirá para las aplicaciones físicas. En (2.31) tenemos un conjunto de ecuaciones de campo n -dimensionales que son el análogo geométrico de las (2.27), que describen la física. Las ecuaciones (2.31) están definidas sobre cada hipersuperficie Σ_ℓ , etiquetada con la coordenada ℓ que, sobre una base física, se demostraran especiales respecto de las otras (y). Los objetos geométricos esenciales, considerados como campos de espín 2, son

$$(2.36) \quad h_{\alpha\beta}(y, \ell), \quad K_{\alpha\beta}(y, \ell), \quad E_{\alpha\beta}(y, \ell).$$

Al ser simétricos, habrá $\frac{3}{2}n(n+1)$ cantidades dinámicas gobernadas por (2.31). Para nuestro propósito, podemos considerar estos componentes como los de un super-vector dinámico $\Psi^\alpha = \Psi^\alpha(y, \ell)$. Sin embargo las ecuaciones de campo (2.31) no contienen ninguna derivada de los tensores (2.36) respecto de ℓ . Esto significa que las componentes $\Psi^\alpha(y, \ell)$ deben satisfacer (2.31) para todos y cada uno de los valores de ℓ . Es decir, las ecuaciones de campo sobre Σ_ℓ , son “conservadas” al movernos entre dichas hipersuperficies. Esto significa que (2.31) en $n+1$ dimensiones son ecuaciones de vínculo en un sentido Hamiltoniano. Mientras que esto es importante desde el punto de vista formal, significa que las ecuaciones (2.27) originales no nos dicen nada acerca de la variación de Ψ^α con ℓ . Así, las ecuaciones de movimiento de Ψ^α variando con ℓ , podrían ser obtenidas de un número equivalente de formas. Por ejemplo, aislando las derivadas respecto de ℓ en la expansión de las identidades de Bianchi $\nabla_A G^{AB} = 0$; por construcción directa de las derivadas de Lie de h_{AB} y $K_{AB} = h_A^C \nabla_C n_B$ con respecto a ℓ^A ; y más formalmente, replanteando la Lagrangiana gravitacional como una Hamiltoniana (con ℓ jugando el papel del tiempo) para obtener las ecuaciones de movimiento.

La obtención de $\partial_\ell \Psi^\alpha$ es engorrosa y no es indispensable en nuestra discusión, entonces la omitiremos y volveremos al tema más importante de los embebimientos. Nuestro objetivo es encontrar una solución para las ecuaciones (2.27) o (2.31) tal que una hipersuperficie Σ_0 en la foliación Σ_ℓ tenga las propiedades geométricas deseables. Por ejemplo, podríamos especificar completamente la métrica inducida y obtener entonces la geometría intrínseca de Σ_0 . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las hipersuperficies de interés se especifican por $\ell = 0$. Para embeber exitosamente Σ_0 en $\mathcal{M}$, necesitamos cumplir con dos requerimientos:

- (a) Resolver las ecuaciones de vínculo (2.31) sobre Σ_0 para $\Psi^\alpha(y, 0)$, tal que Σ_0 tenga las propiedades deseadas (esto usualmente involucra la física del problema).
- (b) Obtener las soluciones para $\Psi^\alpha(y, \ell)$ en el espacio $n+1$ -dimensional (o sea, para $\ell \neq 0$) usando las ecuaciones de evolución $\partial_\ell \Psi^\alpha$ (esto implica principalmente matemática).

Se requieren ambas condiciones para probar el teorema de Campbell-Magaard, junto con algunas cuestiones relacionadas. Así, tenemos que mostrar que (a) es posible para elecciones arbitrarias de $h_{\alpha\beta}$ en Σ_0 , y además mostrar que la solución Ψ^α $n+1$ -dimensional obtenida en (b) preserva las ecuaciones de vínculo en $\Sigma_\ell \neq \Sigma_0$. Este último requerimiento es necesario ya que si se violan las condiciones de vínculo, las ecuaciones de campo $n+1$ -dimensionales no se realizarán más que en Σ_0 (deben verificarse para todo Σ_ℓ).

Nos concentraremos en las ecuaciones de campo en n dimensiones para Σ_0 , y supondremos que, dado $\Psi^\alpha(y, 0)$, el resto de la geometría $n+1$ -dimensional puede ser generada usando ecuaciones de evolución que satisfacen las ecuaciones de campo apropiadas para la métrica más general. Ahora, el resto de la demostración del teorema solo involucra un conteo.

Recordemos que el super-vector Ψ^α tiene un número de componentes dinámicas independientes dado por $n_d = \frac{3}{2}n(n+1)$. Este se puede comparar con el número de ecuaciones de vínculo sobre Σ_0 , el cual resulta $n_c = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Es claro que para $n \geq 2$, n_d es más grande que n_c , lo que significa que nuestro sistema de ecuaciones es indeterminado. El número de parámetros libres es $n_f \equiv n_d - n_c = (n^2 - 1)$. Así, podemos especificar libremente la dependencia funcional

de las $(n^2 - 1)$ componentes de $\Psi^\alpha(y, 0)$. O sea, dado que n_f es más grande que el número de componentes independientes de $h_{\alpha\beta}$ para $n \geq 2$, podemos elegir la longitud de arco infinitesimal sobre Σ_0 de tal forma que corresponda a cualquier variedad Lorentziana n -dimensional, y aún así satisfacer las ecuaciones de vínculo. Esto completa la demostración.

2.3. Dinámica de los campos cuánticos en STM

La Mecánica Ondulatoria y la Teoría de Campos Cuánticos dependen de la constante de Planck, y a través de ella parecen tener cierto nivel de no predecibilidad formalizado en la relación de incerteza de Heisenberg. Por otra parte, la Relatividad General depende de la constante de gravitación de Newton para medir la intensidad de los campos en los cuales el movimiento de una partícula de prueba puede ser predicha con precisión ilimitada. A partir de aquí veremos como las algebras en 5D afectan la física cuántica y clásica, con miras a su reconciliación.

2.3.1. Incerteza en 4D a partir de determinismo en 5D

El objetivo será mostrar primero, como a partir de leyes de movimiento (deterministas) en 5D se genera una dinámica tipo Heisenberg (no determinista) en 4D. Se discutirá la posibilidad de que la masa en 4D esté cuantizada debido a la estructura de la coordenada extra y finalmente se recuperarán las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac en 4D a partir de las mismas en geodésicas nulas en 5D.

La métrica canónica que utilizaremos tiene la siguiente forma

$$(2.37) \quad dS^2 = \left(\frac{\ell}{L}\right)^2 ds^2 - d\ell^2.$$

Las coordenadas son $x^A = (x^\alpha, \ell)$ y el intervalo en 5D contiene al correspondiente en 4D definido por $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, donde $[\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3]$ para espacio y tiempo]. Identificaremos la escala L como el tamaño característico del espacio 4D, en el sentido de un espacio con contenido de energía dado por la constante cosmológica $\Lambda = \frac{3}{L^2}$. Esta métrica además admite una transformación de coordenadas dada por $\ell \rightarrow \frac{L^2}{\ell}$, resultando así

$$(2.38) \quad dS^2 = \frac{L^2}{\ell^2} ds^2 - \frac{L^4}{\ell^4} d\ell^2.$$

Ambas métricas describen la misma física pero en términos de diferentes elecciones de $x^4 = \ell$. Es relevante introducir aquí las siguientes constantes:

$$(2.39) \quad \ell_E = \frac{Gm}{c^2},$$

$$(2.40) \quad \ell_P = \frac{h}{mc},$$

que denominaremos gauges [escalas] de Einstein y Planck respectivamente. Se trata de elecciones convenientes de la coordenada extra, en la medida que representan parametrizaciones de la masa inercial en reposo m de una partícula de prueba que se ajustan a leyes conocidas de la física en 4D. En resumen, representan buenas parametrizaciones para m , puesto que nos permiten geometrizar la masa en forma consistente con el uso de dimensiones físicas. Vale la pena observar que la relación (2.39) corresponde al radio de Schwarzschild de la partícula de prueba, justificando el nombre del gauge correspondiente. Para el caso de (2.40) se ve que se trata de la longitud de onda de Compton de la partícula.

Para nuestro estudio será conveniente iniciar con la métrica (2.38) y su gauge asociado (2.40), usando para esto el tiempo propio s en 4D como parámetro. La densidad Lagrangiana para (2.38)

está asociada al penta-impulso dado por

$$(2.41) \quad \begin{aligned} P_\alpha &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(dx^\alpha/ds)} = \frac{2L^2}{\ell^2} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds}, \\ P_\ell &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(d\ell/ds)} = -\frac{2L^4}{\ell^4} \frac{d\ell}{ds}. \end{aligned}$$

Estos definen un escalar que es el análogo al usado en 4D en Mecánica Cuántica:

$$(2.42) \quad \begin{aligned} \int P_A dx^A &= \int (P_\alpha dx^\alpha + P_\ell d\ell) \\ &= \int \frac{2L^2}{\ell^2} \left[1 - \left(\frac{L}{\ell} \frac{d\ell}{ds} \right)^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Este último es cero ya que $dS^2 = 0$, y a partir de (2.38)

$$(2.43) \quad \ell = \ell_0 e^{\pm \frac{s}{L}}, \quad \frac{d\ell}{ds} = \pm \frac{\ell}{L},$$

donde $\frac{s}{L} \ll 1$, es decir que la variación es lenta. Debemos notar aquí que la partícula de prueba que consideramos tiene energía finita en 4D, pero energía cero en 5D pues $\int P_A dx^A = 0$. La correspondiente relación en 4D es $\int p_\alpha dx^\alpha$, y usando las expresiones anteriores junto con (2.40) se puede obtener

$$(2.44) \quad \begin{aligned} \int p_\alpha dx^\alpha &= \int m u_\alpha dx^\alpha = \int \frac{mc}{c} \left(\frac{dx_\alpha}{ds} \right) dx^\alpha = \\ &= \int \frac{h}{c\ell} \overbrace{\frac{dx_\alpha dx^\alpha}{ds}}^{=ds^2} = \frac{h}{c\ell} \int ds = \pm \frac{h}{c} \frac{L}{\ell}. \end{aligned}$$

Dado que el movimiento es reversible tomaremos el signo positivo por conveniencia. Haremos que $\frac{L}{\ell} = n$, anticipando una interpretación física que indica que n no sólo es adimensional sino que además podría ser racional. Entonces

$$(2.45) \quad \int mc ds = nh.$$

Así, la acción convencional en la física de partículas en 4D parece provenir de una geodésica nula con longitud de arco (2.38) en 5D. La otra cantidad que nos interesa es $dp_\alpha dx^\alpha$. Siguiendo un procedimiento similar y recordando que dx^α transforma como tensor pero x^α no, resulta

$$(2.46) \quad \begin{aligned} dp_\alpha dx^\alpha &= m dx_\alpha dx^\alpha + u_\alpha dm dx^\alpha \\ &= \frac{h}{c} \left(du_\alpha dx^\alpha - u_\alpha dx^\alpha \frac{d\ell}{\ell} \right) \frac{1}{\ell} \\ &= \frac{h}{c} \left(\frac{du_\alpha}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} - \frac{1}{\ell} \frac{d\ell}{ds} \right) \frac{ds^2}{\ell}. \end{aligned}$$

El primer término entre paréntesis es cero si la aceleración es cero o el producto escalar con la velocidad es cero, como en la dinámica 4D convencional. Aun así, hay una contribución del segundo término, el cual proviene del cambio de masa en la partícula. Esta contribución anómala tiene una magnitud

$$(2.47) \quad - |dp_\alpha dx^\alpha| = \frac{h}{c} \left| \frac{d\ell}{ds} \right| \frac{ds^2}{\ell^2} = \frac{h}{c} \frac{ds^2}{L\ell} = n \frac{h}{c} \left(\frac{d\ell}{\ell} \right)^2,$$

donde usamos (2.43) y $n = \frac{L}{\ell}$. De la última se obtiene $\frac{dn}{n} = -\frac{d\ell}{\ell} = \frac{dK}{K}$, donde $K = \frac{1}{\ell}$ es el número de onda de la dimensión extra. Claramente se trata de una relación tipo Heisenberg y se puede escribir como

$$(2.48) \quad |dp_\alpha dx^\alpha| = \frac{h}{c} \frac{dn^2}{n}.$$

A medida que la partícula se mueve en el espacio-tiempo, al mismo tiempo “siente” L , y esto se refleja en el comportamiento de su masa y su impulso. Las relaciones (2.45) y (2.48) cuantifican este hecho. Si la partícula es vista como una onda, su 4-impulso queda definido por la longitud de onda de De Broglie y su masa queda definida por la longitud de onda de Compton. La cuestión entonces es si las ondas se propagan en una topología abierta o quedan atrapadas en una topología cerrada. En el primer caso, la longitud de onda no está restringida por la geometría, y las partículas de masa pequeña pueden tener grandes longitudes de onda de Compton $\ell = \frac{h}{mc}$ con $\ell > L$ y $n < 1$. En el último caso, la longitud de onda no puede exceder el tamaño de confinamiento de la geometría, y las partículas con masa muy grande tienen pequeñas longitudes de onda de Compton con $\ell \leq L$ y $n \geq 1$. Por la relación (2.48) el primer caso obedece el principio de incerteza convencional, mientras que el último caso lo viola. Tentativamente identificamos el primer caso como la aplicación a partículas “reales” y el último caso como la aplicación a partículas “virtuales”.

2.3.2. El problema de la cuantización de la masa

A partir de aquí, podemos tomar el enfoque genérico proporcionado por el análisis dimensional y ver lo que implica, dados los datos actuales sobre una escala más pequeña o un cuanto de masa. Entonces podemos comparar el resultado de este enfoque genérico con el resultado específico que surge de la relatividad en 5D. Así, a partir de h , G , c y Λ podemos dar forma a una masa microscópica

$$(2.49) \quad m_P = \left(\frac{h}{c}\right) \left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} \simeq 2 \times 10^{-65} g,$$

y una masa macroscópica

$$(2.50) \quad m_E = \left(\frac{c^2}{G}\right) \left(\frac{3}{\Lambda}\right)^{1/2} \simeq 1 \times 10^{56} g.$$

En lo que sigue las dos masas son relevantes para casos cuánticos y gravitacionales, y serán designados masa de Planck y masa de Einstein respectivamente.

Se puede mencionar que la masa $m_{PE} = (hc/G)^{1/2} \simeq 5 \times 10^{-5} g$, llamada también masa de Planck, no involucra Λ y mezcla h y G , de tal forma que desde el punto de vista de la teoría de campos multidimensional, surge de una mezcla de gauges y esta patológicamente definida. Posiblemente, esto explica porque esta masa no se manifiesta en la naturaleza.

La masa (2.50) es la que corresponde a la parte observable del universo, mientras que la masa (2.49) parece ser la que proviene de perturbaciones cuánticas en un espacio-tiempo con una pequeña curvatura local, medida a partir del valor astrofísico de Λ (Lineweaver, 1998; Overduin, 1999; Perlmutter, 2003), en contraposición a la inferida a partir de la interacción de campos cuánticos (Weinberg, 1980; Padmanabhan, 2003).

La Relatividad en 5D nos da un medio específico de análisis. Existen dos marcos coordinados, con diferentes identificaciones para la coordenada extra. Estos son $\ell_E = Gm/c^2$ y $\ell_P = h/mc$, para los gauges de Einstein y Planck respectivamente. Dado que necesitamos distinguir entre los gauges introducimos

$$(2.51) \quad dS^2 = \left(\frac{L}{\ell_P}\right)^2 ds^2 - \left(\frac{L}{\ell_P}\right)^4 d\ell_P^2,$$

para el gauge de Planck, mientras que

$$(2.52) \quad dS^2 = \left(\frac{\ell_E}{L} \right)^2 ds^2 - d\ell_E^2,$$

es para el gauge de Einstein. Ambos implican diferentes escalas de masa. Para ver donde se origina la masa microscópica (2.49), tomamos (2.51) para la geodésica nula y obtenemos

$$(2.53) \quad \int d \left(\frac{L}{\ell_P} \right) = \frac{1}{h} \int mcds.$$

Se puede hacer uso de la cuantización de la acción convencional (2.45). Resulta entonces que $L/\ell_P = n$ entero. Así, la longitud de onda de Compton no toma cualquier valor, quedando restringida por la dimensión típica del espacio-tiempo curvo en el que la partícula existe. La última relación dice finalmente que $m = (nh/c)(\Lambda/3)^{1/2}$. Para el estado fundamental con $n = 1$, hay una masa mínima $(h/c)(\Lambda/3)^{1/2} \simeq 2 \times 10^{-65}g$.

Para ver donde se origina la masa macroscópica (2.50), acudimos a la condición $L/\ell = n$, que se verifica en el gauge de Planck, para revertir el argumento y deducir la cuantización de la acción a partir de la cuantización de la coordenada extra. Esto indica que esta última debe ser una suposición fundamental. Tomemos $L/\ell_E = n$ en el gauge de Einstein, lo que implica que $d\ell_E/ds = 1/n$ (que se mantiene también en el gauge de Planck). Poniendo todo junto en la condición (2.39), obtenemos para la masa $m = (c^2/nG)(3/\Lambda)^{1/2}$. Para el estado fundamental con $n = 1$, hay un valor máximo de la masa que se corresponde con (2.50).

En resumen, del análisis dimensional surgen dos escalas de masa que dependen del valor de Λ . Las escalas de masa pueden ser concebidas como una consecuencia de la discretización de la coordenada extra. La escala más pequeña define una masa cuántica de aproximadamente $2 \times 10^{-65}g$, que es demasiado pequeña para ser detectada en experimentos convencionales.

2.3.3. Las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac en 5D

En esta sección revisaremos las ecuaciones de onda en 4D y mostraremos como pueden ser obtenidas desde 5D (Wesson, 2003). La ecuación de Klein-Gordon relaciona la masa inercial en reposo m de una partícula de espín 0 sobre una métrica de Mikowski 4D con una función de onda escalar ϕ como sigue

$$(2.54) \quad \square^2 \phi + m^2 \phi = 0.$$

Aquí $\square^2 \phi = \eta^{\alpha\beta} \partial^2 \phi / \partial x^\alpha \partial x^\beta$, y la generalización a un espacio curvo en 4D dado por $g^{\alpha\beta}$ es directa usando la definición de derivada covariante $\square^2 \phi = g^{\alpha\beta} \phi_{;\alpha;\beta}$. Definimos $p_\alpha = (1/i\phi) \partial \phi / \partial x^\alpha$ y $\phi = e^{[i \int p_\alpha dx^\alpha]} = e^{[i \int mds]}$. Las 4-velocidades pueden ser convencionalmente normalizadas a través de $u^\alpha u_\alpha = 1$, de donde recuperamos $p^\alpha p_\alpha = m^2$, o bien

$$(2.55) \quad E^2 - p^2 - m^2 = 0.$$

Dado que (2.54) y (2.55) en 4D deben ser recuperadas de una situación bastante diferente en 5D, presentamos aquí las relaciones que se cumplirán en 5D

$$(2.56) \quad \square^2 \Phi = 0,$$

$$(2.57) \quad P^A P_A = 0.$$

Es decir, se tiene una ecuación para un campo escalar sin masa en 5D y su respectiva normalización. Todo esto se hace en el contexto de un “vacío” pentadimensional ($R_{AB} = 0$).

El embebimiento de la dinámica tetra-dimensional en 5D requiere de la elección de un gauge, y son tres los que utilizaremos. El gauge de Minkowski es plano en 5D y su geodésica nula está

dada por $dS^2 = 0 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) - d\ell_M^2$, entonces $\ell_M = \pm s$. El gauge de Planck, para el cual $dS^2 = 0 = (L/\ell_P)^2 ds^2 - (L/\ell_P)^4 d\ell_P^2$, mientras que $\ell_P = \ell_0 e^{\pm s/L}$. Finalmente el gauge de Einstein con $dS^2 = 0 = (\ell_E/L)^2 ds^2 - d\ell_E^2$, y correspondientemente $\ell_E = \ell_0 e^{\pm s/L}$. El gauge de Planck puede obtenerse del de Einstein por medio de la transformación $\ell_E \rightarrow L^2/\ell_P$. En el gauge de Planck L es el tamaño de un pozo de potencial en el cual la partícula se mueve. En el gauge de Einstein L es muy grande y está relacionado con la constante cosmológica por medio de $\Lambda = 3/L^2$. Los tres gauges son apropiados para resolver diferentes situaciones. La conexión entre las “variedades nulas” de Minkowski y Einstein se puede hacer por las relaciones ya vistas $\ell_E = \ell_0 e^{\pm \ell_M/L}$.

Una función de onda Φ , extendida de 4D a 5D tiene la forma $\Phi = e^{[i \int (p_\alpha dx^\alpha + p_M d\ell_M)]}$ en el gauge de Minkowski. En el gauge de Einstein la parte en 4D y la parte en coordenadas extra son iguales dando [tomamos $c = 1$]

$$(2.58) \quad \Phi = e^{[i \int m ds]}.$$

Sin embargo, en esta última $m = m(s)$, por lo que la masa debe permanecer dentro del integrando. Tomando logaritmos y escribiendo dS_4 para la parte 4D, notamos que para una “longitud de camino nulo” $|dS_4| = d\ell_E$, se puede escribir

$$(2.59) \quad \ln(\Phi) = iL \int |dS_4| = iL \ell_E.$$

Para una superposición de estados resulta

$$(2.60) \quad \ln(\Phi_1 \Phi_2 \dots) = iL(\ell_E^1 + \ell_E^2 + \dots) = iL \ell_E^{total}.$$

Es decir, la función de onda para un sistema de partículas resulta en la extensión total en la coordenada extra o la masa total.

Volviendo a la función de onda (2.58), esta satisface (2.56) de donde

$$(2.61) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = -\Phi \left[m^2 \frac{ds}{dx^\alpha} \frac{ds}{dx^\beta} + im \frac{du^\kappa}{ds} \frac{ds}{dx^\kappa} \frac{ds}{dx^\alpha} \frac{ds}{dx^\beta} - i \frac{dm}{ds} \frac{ds}{dx^\alpha} \frac{ds}{dx^\beta} \right].$$

En esta ecuación los dos últimos términos del segundo miembro corresponden a una generalización de la fuerza en la coordenada extra y son ambos imaginarios. Tomando la parte real de (2.61) y contrayendo índices

$$(2.62) \quad g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = -m^2 \Phi g^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta,$$

donde $\nu_\alpha = ds/dx^\alpha$, lo que implica $u^\alpha \nu_\alpha = 1$. Como las 4-velocidades se normalizan por la relación $u^\alpha u_\alpha = 1$, entonces $\nu_\alpha = u_\alpha$. Con la definición ya vista de la d’Alambertiana podemos escribir

$$(2.63) \quad \square^2 \Phi + m^2(s) \Phi = 0.$$

Esta es igual a la ecuación de Klein-Gordon convencional pero su interpretación física está sujeta a que $m = m(s)$. Finalmente, la Relatividad en un vacío en 5D nos permite inducir una ecuación de Klein-Gordon en 4D pero con una masa variable.

La ecuación de Dirac relaciona la masa m de una partícula de espín 1/2 con un campo bi-espinorial a través de

$$(2.64) \quad i\gamma^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} - m\psi = 0.$$

donde γ^α son las matrices 4×4 que obedecen el álgebra $\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2\eta^{\alpha\beta}$. Todo esto es requerido en 4D pues se debe recuperar esta situación a partir de una en 5D bastante diferente.

La principal diferencia es que las cantidades involucradas en el problema en 4D no están definidas de forma covariante mientras que en 5D si lo están. El campo puede ser pensado como una matriz columna de 4 elementos, pero ni el campo ni las matrices son 4-vectores. Este problema técnico se puede soslayar comprendiendo que si ψ^* es el conjugado de ψ , entonces la combinación $\gamma^\alpha(\partial\psi/\partial x^\alpha)\psi^*$, por (2.64), debe medir la cantidad escalar real m , que puede identificarse como una cantidad geométrica en 5D después de elegir alguno de los gauges discutidos.

Un tema relacionado involucra la distinción entre electrones y positrones. En 4D se acostumbra considerar los dos elementos superiores de ψ como estados de espín del electrón mientras que los dos inferiores representan estados de espín del positrón. Sin embargo, en 5D tal asignación no puede hacerse a priori, y la degeneración electrón/positrón es resuelta por la presencia de un campo electromagnético.

Un último problema que requiere algún comentario es el origen del momento angular de espín de una partícula. En 4D es usual anular la componente cero del vector de espín S_α , refiriendo el momento angular al centro de masas. Las otras tres componentes están dadas por $u^\alpha S_\alpha = 0$, que proviene de las propiedades del tensor de momento angular. En 5D aparece una relación similar pues S_A es tipo-espacio mientras que dx^A/dS es tipo-tiempo, así su producto interno puede siempre anularse. Sin embargo, S_4 no se puede hacer cero con un argumento similar al de S_0 en 4D, debido a que la componente del momento angular en la coordenada extra involucra la masa de la partícula.

Si bien conviene mantener un análogo en 5D de la ecuación (2.64), es de esperar que surjan ciertas diferencias de interpretación física. Con esto en mente escribimos la relación de ortogonalidad espín/velocidad

$$(2.65) \quad u^A S_A = u^\alpha S_\alpha + u^4 S_4 = 0$$

y alternativamente

$$(2.66) \quad u^\alpha S'_\alpha \pm w = 0$$

donde $S'_\alpha = S_\alpha/S_4$ se define en analogía con la teoría de Kaluza-Klein, en donde los potenciales $A_\alpha = g_{\alpha 4}/g_{44}$. En aquel caso el gauge de Einstein nulo resultaba ser $dS^2 = 0 = \frac{\ell_E^2}{L^2} ds^2 - (d\ell_E + A_\alpha dx^\alpha)^2$, que daba $w = \frac{\ell_E}{L} \left| 1 + \frac{L}{\ell_E} A_\alpha u^\alpha \right|$. En nuestro caso L puede ser absorbido dentro del gauge de Einstein y en el límite de campo débil $\ell_E = m$ y $w = m$ por lo tanto

$$(2.67) \quad u^\alpha S'_\alpha \pm m = 0$$

Si redefinimos $u^\alpha S'_\alpha$ en términos de un campo bi-espinorial obtenemos una relación formalmente similar a (2.64). Una ruta más directa a la ecuación de Dirac es suponer la existencia de un campo $\Psi(x^A)$ en 5D que obedezca

$$(2.68) \quad i\gamma^A \frac{\partial \Psi}{\partial x^A} = i \left(\gamma^\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x^\alpha} + \gamma^4 \frac{\partial \Psi}{\partial x^4} \right) = 0.$$

Aquí las matrices de Dirac se extienden a $\gamma^A (A = \alpha, 4)$; y $\partial\Psi/\partial x^4 = (d\Psi/ds)(ds/dx^4) = \pm(L/\ell)(d\Psi/ds)$ para los gauges de Einstein y Planck. Como vimos L puede ser absorbido y $\ell_P = 1/m$ hace que (2.68) sea formalmente la misma que (2.64) excepto por γ^4 . Esto no tiene ninguna razón de ser obvia, pero se puede dar una a través de la identidad de Hoyle-Narlikar

$$(2.69) \quad |\bar{\Psi}\Psi|^2 = (\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_\alpha\Psi) - (\bar{\Psi}\gamma_4\Psi)^2.$$

Así, la ecuación de Dirac (2.64) en 4D resulta una consecuencia de las relaciones (2.65) y (2.68) en 5D, en los gauges de Einstein y Planck.

Finalmente, la necesidad de definir las matrices de Dirac en un espacio Lorentziano 5D surge de manera más natural del álgebra de Clifford, donde se verifica la siguiente propiedad

$$(2.70) \quad \gamma^A = \frac{1}{4!} \varepsilon_{BCDE}^A \gamma^B \gamma^C \gamma^D \gamma^E,$$

que nos dice que existen 5 vectores linealmente independientes que conforman una base ortogonal sobre un espacio-tiempo plano y globalmente hiperbólico 5D. En dicho espacio-tiempo es natural definir el invariante $i\gamma^A \partial_A \Psi = 0$ dado por la ecuación (2.68).

Capítulo 3

Introducción a los modelos de inflación

3.1. Dinámica del Inflatón

Los modelos inflacionarios pueden comprender varios tipos de acoplamiento gravitacional. En este capítulo sólo consideraremos modelos para un campo escalar mínimamente acoplado (Bellini y Sisterna, 1995; Bellini et al., 1996; Casini et al., 1999), dado por la densidad Lagrangiana

$$(3.1) \quad \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = -\sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) \right],$$

donde R es la curvatura escalar y $V(\varphi)$ es el potencial asociado al operador de campo $\varphi(\vec{x}, t)$. Nos restringiremos a enfoques inflacionarios que requieren de una transición de fase de segundo orden desde un estado metaestable del vacío, donde el potencial $V(\varphi)$ debe ser muy plano. Esto último significa que su derivada segunda respecto del campo debe ser mucho menor que M_P^2 ($\frac{d^2 V(\varphi)}{d\varphi^2} \ll M_P^2$). Este tipo de potenciales también se utilizan en modelos de inflación caótica. En este caso el campo escalar rueda desde un valor para el cual el potencial es máximo. Como la inflación es un proceso clásico, el potencial debe estar por debajo de la escala de Planck. Esto impone una cota superior para el potencial escalar: $V(\varphi) \sim M_p^4$ (donde $M_p \simeq 1,2 \times 10^{19}$ GeV es la masa de Planck). La inflación finaliza cuando el campo asume valores muy cercanos al mínimo absoluto del potencial escalar. La teoría estándar del Big Bang se aplica luego del recalentamiento que sigue a la inflación. Este es el esquema general del escenario inflacionario sin considerar los efectos cuánticos. La intención del enfoque estocástico inflacionario es incluir estas contribuciones en una teoría clásica efectiva.

Dado que el universo resulta ser muy homogéneo e isótropo en la escala cosmológica (esto es, entre 10^{26} cm. y 10^{28} cm.), la métrica más adecuada para describirlo es la de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), para un universo espacialmente plano

$$(3.2) \quad ds^2 = -dt^2 + a^2(t) dr^2,$$

donde a es el factor de escala del universo. Las ecuaciones que resultan para el operador de campo φ y el parámetro de Hubble $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ (ecuación de Friedmann semiclásica), son

$$(3.3) \quad \ddot{\varphi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \varphi + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0,$$

$$(3.4) \quad H^2 = \frac{4\pi}{3M_p^2} \langle \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{a^2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + 2V(\varphi) \rangle,$$

donde el punto denota la derivada temporal y $V'(\varphi) \equiv \frac{dV}{d\varphi}$. Las ecuaciones (3.3) y (3.4) son operatoriales. Dada la interacción del campo escalar, no es fácil definir un espacio de funciones sobre el que actúa el operador φ . Si tal espacio no está bien definido, las ecuaciones (3.3) y (3.4)

no tienen sentido. Por consistencia con la métrica de FLRW, el valor esperado del campo se supone sólo dependiente del tiempo.

Dada la dificultad para resolver las ecuaciones (3.3) y (3.4), trataremos de construir una teoría semiclásica. Para ello se puede descomponer al operador inflatón en un campo clásico ϕ_c , más una corrección cuántica descrita por el operador ϕ

$$(3.5) \quad \varphi(\mathbf{x}, t) = \phi_c(t) + \phi(\mathbf{x}, t).$$

Sea $|E\rangle$ un estado cuántico arbitrario tal que $\langle E|\varphi|E\rangle = \phi_c(t)$ es la solución de las ecuaciones de Einstein respecto de la métrica de fondo (3.2). Por consistencia, requeriremos que $\langle E|\phi|E\rangle = \langle E|\dot{\phi}|E\rangle = 0$. Aunque el estado cuántico de φ no es el vacío, actúa como vacío de la componente cuántica ϕ . De este modo, substituyendo (3.5) en la ecuación (3.3), se pueden escribir un par de ecuaciones para cada una de las componentes ϕ_c y ϕ . Comenzaremos tratando la dinámica del campo ϕ_c .

3.1.1. Dinámica clásica del inflatón

En el marco de la aproximación semiclásica supondremos que ϕ_c cumple con la ecuación de movimiento

$$(3.6) \quad \ddot{\phi}_c + 3H\dot{\phi}_c + V'(\phi_c) = 0.$$

Derivando respecto del tiempo en la ecuación (3.4) se puede caracterizar la dinámica clásica del parámetro de Hubble y la del inflatón

$$(3.7) \quad \dot{\phi}_c = -\frac{M_p^2}{4\pi} H'_c,$$

$$(3.8) \quad \dot{H}_c = H'_c \dot{\phi}_c = -\frac{M_p^2}{4\pi} (H'_c)^2.$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (3.4) se obtiene la ecuación que relaciona el potencial escalar clásico con el parámetro de Hubble

$$(3.9) \quad V(\phi_c) = \frac{3M_p^2}{8\pi} \left(H_c^2 - \frac{M_p^2}{12\pi} (H'_c)^2 \right).$$

Las ecuaciones (3.8) y (3.9) definen la evolución clásica del espacio tiempo, determinando la relación entre el potencial clásico y el régimen inflacionario. Durante la era inflacionaria el factor de escala satisface la condición $\ddot{a} > 0$ y crece rápidamente. Obsérvese que el $\dot{H}_c$ es negativo, lo cual implica que H_c disminuye con el tiempo.

La escala temporal característica para el campo inflatón puede definirse por $\tau_d = \phi_c \dot{\phi}_c^{-1}$, y su relación con el parámetro de Hubble está dada por:

$$\nu \equiv \frac{\tau_d}{\tau_H} = \tau_d H = \frac{H\phi_c}{\dot{\phi}_c} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2\pi}{M_p} \frac{\phi_c}{\dot{\phi}_c} \rho^{1/2}.$$

donde $\rho \sim V(\phi_c)$ es la densidad de energía durante el período inflacionario, dado que $\dot{\phi}_c^2/2 \ll V(\phi_c)$. El número de desdoblamientos exponenciales en un lapso δt está dado por:

$$(3.10) \quad N_e = \int_{t_0}^{t_0+\delta t} dt H(\tilde{t}) = \int_{\phi_0}^{\phi_c} d\tilde{\phi}_c \frac{\nu(\tilde{\phi}_c)}{\tilde{\phi}_c}.$$

3.1.2. Rodadura lenta del campo clásico

Bajo la condición de rodadura lenta $\ddot{\phi}_c$ es despreciable frente a los otros dos términos en la ecuación (3.6). Ésto significa que el tiempo característico de variación de $\dot{\phi}_c$ es mayor que el de la expansión del universo ($\tau_d \gg \tau_H = H^{-1}$). Luego, su ecuación de movimiento resulta

$$(3.11) \quad \dot{\phi}_c \simeq -\frac{V'(\phi_c)}{3H_c},$$

y la ecuación (3.9) queda:

$$(3.12) \quad H_c^2 \simeq \frac{8\pi^2}{3M_P^2} V(\phi_c).$$

- La versión más simple es la de un campo escalar masivo no interactuante con potencial efectivo $V_c = \frac{1}{2}m^2\phi_c^2$, con m como la masa del campo escalar ϕ_c ($m \ll 1$). Si inicialmente el campo escalar arranca desde el valor máximo $(\phi_c)_o$, siendo ϕ_c suficientemente grande ($\phi_c \gg 1$), entonces se puede mostrar que las funciones $\phi_c(t)$ y $a(t)$ rápidamente se aproximan al régimen asintótico:

$$(3.13) \quad \phi_c(t) = (\phi_c)_o - \frac{mM_P}{2(3\pi)^{1/2}}t,$$

$$(3.14) \quad a(t) = a_o e^{2\pi[(\phi_c)_o^2 - \phi_c^2(t)]/M_P^2}.$$

De acuerdo con las ecuaciones (3.13) y (3.14), durante el tiempo ϕ_c/M_P , el cambio del campo ϕ_c es pequeño. El potencial efectivo varía muy suavemente y el universo se expande cuasi exponencialmente

$$(3.15) \quad a(t + \Delta t) \approx a(t) e^{H_c \Delta t},$$

donde $\Delta t \leq \phi_c/M_P$. Para este modelo se tiene un parámetro de Hubble:

$$(3.16) \quad H_c = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} M_P \phi_c.$$

Obsérvese que si $\phi_c \gg M_P$, entonces: $\tau_d \gg H_c^{-1}$.

La expansión inflacionaria del universo finaliza cerca del mínimo de potencial, esto es, cuando $\phi_c \simeq (\phi_c)_e$. Luego el campo empieza a oscilar alrededor de su mínimo de potencial e ingresa en lo que se llama era de recalentamiento. De acuerdo con esta teoría (Kofman et al., 1994), hay tres etapas diferentes. Durante la primera el campo escalar clásico comienza a oscilar, y decae en bosones masivos debido al fenómeno de resonancia paramétrica. En muchos casos la banda de resonancia es muy ancha y el proceso ocurre extremadamente rápido. Este estado se denomina precalentamiento. Los bosones producidos en este período están lejos del equilibrio térmico y tienen números de ocupación muy grandes. El segundo período consiste en el decaimiento de las partículas previamente producidas, luego de lo cual éstas se termalizan con una temperatura T_r (tercera etapa). En el ejemplo considerado aquí se tiene $(\phi_c)_e \approx 0,2M_P$. Cuando $\phi_c \leq (\phi_c)_e$ el campo escalar ϕ_c oscila rápidamente, y si interactúa con otro campo de materia, su energía potencial $V(\phi_c) \approx \frac{m^2(\phi_c)_e^2}{2}$ se transforma en energía térmica. La temperatura asociada T_r puede ser del orden de $m^{1/2}$ o menor. Además, T_r no depende del valor inicial del campo, $(\phi_c)_o$, pero sí del factor de escala $a(t)$. Éste crece $e^{2\pi(\phi_c)_o^2/M_P^2}$ veces durante la inflación y el argumento $N_e = 2\pi(\phi)_o^2/M_P^2$ se le conoce como número de desdoblamiento exponenciales [ver ecuación (3.10)].

- El resultado anteriormente obtenido se puede generalizar para modelos con potenciales efectivos $V(\phi_c)$ más complicados. Por ejemplo, para teorías con $V(\phi_c) = \frac{\lambda}{n}\phi_c^n$, se tiene:

$$(3.17) \quad \phi_c^{\frac{4-n}{2}}(t) = (\phi_c)_o^{\frac{4-n}{2}}(t) - \frac{4-n}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{n}\lambda}{24\pi}} M_P t, \quad \text{para } n \neq 4,$$

y

$$(3.18) \quad \phi_c(t) = (\phi_c)_o e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}}t}; \quad \text{para } n = 4.$$

Para un n cualquiera el factor de escala es

$$(3.19) \quad a(t) = a_o e^{\left[\frac{4\pi}{n}((\phi_c)_o^2 - (\phi_c)^2(t))\right]/M_P^2}.$$

El período inflacionario finaliza cuando:

$$(3.20) \quad (\phi_c)_e \approx \frac{nM_P}{4\sqrt{3\pi}}.$$

Para que se cumplan las condiciones de rodadura lenta, deben satisfacerse las siguientes condiciones:

$$(3.21) \quad \Theta = \frac{2}{K^2} \left(\frac{H'_c}{H_c} \right)^2 \ll 1,$$

$$(3.22) \quad \Sigma = \frac{2}{K^2} \frac{H''_c}{H_c} \ll 1,$$

donde $K = \frac{\sqrt{8\pi}}{M_P}$ (Copeland et al., 1993). La inflación termina cuando el factor de escala deja de acelerarse ($\ddot{a} \sim 0$). Además, $\Theta(\phi_c) = 1$, cuando el campo asume el valor $\phi_c = (\phi_c)_e$.

Finalmente, bajo la condición de rodadura lenta, ν y N_e pueden aproximarse a las expresiones:

$$\nu \sim -\frac{8\pi^2 \phi_c}{M_P^2} \frac{V(\phi_c)}{V'(\phi_c)},$$

$$N_e \sim -\frac{8\pi^2}{M_P^2} \int_{\phi_0}^{\phi_c} d\tilde{\phi}_c \frac{V(\tilde{\phi}_c)}{V'(\tilde{\phi}_c)}.$$

La solución para el problema del horizonte (ver cita) requiere que $N_e \geq 60$ y por lo tanto: $\tau_d > \tau_H$.

3.1.3. Dinámica de las fluctuaciones cuánticas

Durante el período inflacionario las fluctuaciones cuánticas son muy importantes y las inhomogeneidades espaciales a escalas mucho mayores a las del horizonte no pueden ser despreciadas. Éstas constituyen el germen para la posterior formación de estructura en el universo, luego de terminada la inflación. Así como el campo clásico ϕ_c provoca la expansión del universo, la componente cuántica ϕ nos da la semilla para la posterior formación de estructuras, provenientes de las fluctuaciones en la densidad de energía del vacío metaestable.

La evolución del operador cuántico ϕ [ver ecuación (3.3)] está dada por

$$(3.23) \quad \ddot{\phi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi + 3H\dot{\phi} + \sum_n \frac{1}{n!} V^{(n+1)}(\phi_c) \phi^n = 0.$$

Por definición, el valor medio de ϕ es nulo ($\langle E|\phi|E \rangle \equiv \langle \phi \rangle = 0$), y el valor de expectación del campo cuántico φ está dado por su componente clásica ($\langle E|\varphi|E \rangle = \phi_c$). Además, requeriremos $\langle E|\phi|E \rangle = 0$. Si efectuamos la aproximación lineal ($n = 1$) en (3.23), es posible substituir H por H_c , y se obtiene

$$(3.24) \quad \ddot{\phi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi + 3H_c \dot{\phi} + V''(\phi_c) \phi = 0.$$

Debido a que la ecuación (3.24) es lineal, un acoplamiento no mínimo sólo cambiará la evolución temporal de la masa efectiva $V''(\phi_c)$ y por lo tanto la dinámica de la componente clásica.

Por otro lado el parámetro de Hubble puede expandirse en el entorno de H_c

$$(3.25) \quad H = H_c \left[1 + \frac{1}{2H_c^2} \left\langle \dot{\phi}^2 + \frac{1}{a^2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + \sum_n \frac{1}{n!} V^{(n+1)}(\phi_c) \phi^n \right\rangle \right],$$

donde el parámetro clásico de Hubble H_c , es:

$$(3.26) \quad H_c^2 = \frac{4\pi}{3M_p^2} \left[\dot{\phi}_c^2 + 2V(\phi_c) \right].$$

En el esquema inflacionario, la componente ϕ_c provoca la expansión del universo, y es por ello que se la llama campo inflatón. En cambio, las fluctuaciones cuánticas ϕ (espacialmente inhomogéneas), generan las fluctuaciones de densidad de energía.

3.1.4. Redefinición de las fluctuaciones cuánticas

El estudio de la componente cuántica se simplifica haciendo la transformación $\phi = \chi(t) e^{-\frac{3}{2} \int dt H(t)}$ en (3.24). La ecuación de movimiento que resulta para el campo χ es:

$$(3.27) \quad \ddot{\chi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \chi - \frac{k_0^2}{a^2} \chi = 0,$$

donde $k_0^2 = a^2 \left(\frac{9}{4} H^2 + \frac{3}{2} \dot{H} - V_c'' \right)$. Ésta es una ecuación de Klein - Gordon en un espacio tiempo globalmente plano, isótropo y homogéneo y χ puede interpretarse como un campo escalar libre con un parámetro de masa $\mu(t) = \frac{k_0}{a}$, dependiente del tiempo. Se puede hacer una expansión de Fourier del campo χ en términos de los modos $\xi_k(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$:

$$(3.28) \quad \chi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[a_k \xi_k(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + a_k^\dagger \xi_k^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right],$$

donde los operadores de aniquilación (a_k) y creación ($a_k^\dagger$) satisfacen las reglas de conmutación para bosones:

$$(3.29) \quad [a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta^{(3)}(k - k') \quad ; \quad [a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0,$$

mientras que los modos ξ_k satisfacen la ecuación de movimiento

$$(3.30) \quad \ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0,$$

tal que el cuadrado de la frecuencia ω_k asociada a cada modo con número de onda k es $\omega_k^2 = a^{-2} (k^2 - k_0^2)$. Aquellos modos cuyo número de onda k sea menor que k_0 , tendrán frecuencia imaginaria y por lo tanto serán inestables. Ésto implica un crecimiento exponencial de los modos, en particular con respecto al horizonte. Estos modos están asociados a longitudes de onda larga y cumplen con la condición

$$(3.31) \quad k < a \left[\frac{9}{4} H^2 + \frac{3}{2} \dot{H} - V_c'' \right]^{1/2},$$

para $\frac{9}{4} H^2 + \frac{3}{2} \dot{H} - V_c'' > 0$. La función $k_0(t)$ es el número de onda que delimita el sector infrarrojo inestable del sector asociado a longitudes de onda corta. Como k_0 aumenta con el tiempo, algunos modos que en un principio estaban en el sector de onda corta pasarán al sector de onda larga. Para que la teoría sea consistente, χ y $\dot{\chi}$ deben cumplir con las relaciones canónicas de conmutación

$$(3.32) \quad [\chi(\vec{r}, t), \dot{\chi}(\vec{r}', t')] = i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}').$$

Para ello debe satisfacerse la siguiente relación de consistencia entre los modos:

$$(3.33) \quad \xi_k(t) \dot{\xi}_k^*(t) - \dot{\xi}_k(t) \xi_k^*(t) = i.$$

Esta ecuación nos permite renormalizar los modos de acuerdo con la ecuación (3.32). Hasta aquí hemos definido una teoría cuántica de un campo escalar autointeractuante, mínimamente acoplado con una métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker en 4D.

3.2. Expansión inflacionaria desde una teoría de Kaluza-Klein no compacta

Las dos versiones actuales para una teoría de gravedad en 5D son Teoría de Membranas (Arkani-Hamed et al., 1998; Antoniadis et al., 1998; Youm, 2000; Maartens, 2000; Chamblin, 2001; Wesson et al., 1999; Ponce de León, 2001a; Randall y Sundrum, 1999) y Materia Inducida (Overduin y Wesson, 1997) (ver Capítulo 2). En la primera la gravedad se propaga libremente en el espacio pentadimensional mientras que las interacciones entre las partículas quedan confinadas en una hipersuperficie (la “brana”). Materia Inducida, en su forma más simple, es una teoría de Kaluza-Klein en la cual la dimensión extra no está compactificada y las ecuaciones de la Relatividad General en 4D se obtienen del hecho que la variedad 5D es Ricci-plana. De esta manera el universo 4D esta embebido en una variedad 5D Ricci-plana y así, la dimensión extra es responsable de la aparición de fuentes en 4D. Un resultado interesante que aparece en Materia Inducida es que si $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ es la métrica 4D general, la métrica $dS^2 = (\psi/\psi_0)^2 ds^2 - d\psi^2$ en 5D corresponde a una variedad Ricci-plana (Mashhoon et al., 1994; Mashhoon y Wesson, 2004).

En las últimas dos décadas el paradigma inflacionario se ha convertido en un escenario universalmente aceptado, dado que explica la planaridad y homogeneidad observadas en el universo a gran escala (Lyth y Riotto, 1999). En particular, el enfoque estocástico en inflación ha sido ampliamente desarrollado en los últimos años (Habib, 1992; Mijić, 1994; Copeland et al., 1993; Liguori et al., 2004). En el tratamiento moderno de inflación uno realiza una expansión perturbativa del potencial asociado al campo escalar en términos de fluctuaciones cuánticas del campo inflatón. Luego se obtiene una solución a primer orden para la ecuación de movimiento que corresponde a dichas fluctuaciones (Bellini et al., 1996). Si bien la aproximación resulta buena durante inflación a escalas cosmológicas, estos resultados podrían mejorarse significativamente usando cálculos no perturbativos para el campo inflatón. Se sabe, sin embargo, que esto es imposible en un formalismo de teoría de campos cuánticos en 4D.

La idea aquí es desarrollar una teoría de campos cuánticos no perturbativa en 5D, desde un estado de vacío aparente definido a partir de una densidad Lagrangiana puramente cinética. Dicha Lagrangiana corresponde a un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad en una variedad 5D Ricci-plana (Madriz Aguilar y Bellini, 2004a,b). Comenzamos definiendo la métrica canónica (Ledesma y Bellini, 2004) para nuestra variedad

$$(3.34) \quad dS^2 = \psi^2 dN^2 - \psi^2 e^{2N} dr^2 - d\psi^2,$$

donde $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Las coordenadas $(N, \vec{r})$ son adimensionales y la coordenada extra ψ tiene unidades espaciales. Supondremos que la dimensión extra es tipo espacio y el universo 3D es espacialmente plano, isótropo y homogéneo. La métrica (3.34) define una variedad 5D plana en un vacío aparente ($G_{AB} = 0$).

Ahora consideraremos la Lagrangiana para materia neutral

$$(3.35) \quad {}^{(5)}L(\varphi, \partial_A \varphi) = -\sqrt{\left| \frac{{}^{(5)}g}{{}^{(5)}g_0} \right|} {}^{(5)}\mathcal{L}(\varphi, \partial_A \varphi),$$

donde $|{}^{(5)}g| = \psi^8 e^{6N}$ es el valor absoluto del determinante para el tensor métrico en 5D con componentes g_{AB} (A, B toman valores 0, 1, 2, 3, 4) y $|{}^{(5)}g_0| = \psi_0^8 e^{6N_0}$ es una constante dimensional determinada por $|{}^{(5)}g|$ y evaluada en $\psi = \psi_0$ y $N = 0$, de forma que ${}^{(5)}g_0 = \psi_0^8$ indica valores a finales de inflación.

A la Lagrangiana definida por (3.35) le corresponde la siguiente acción

$$I = -\int d^4x d\psi \sqrt{\left| \frac{{}^{(5)}g}{{}^{(5)}g_0} \right|} \left[\frac{{}^{(5)}R}{16\pi G} + \mathcal{L}(\varphi, \partial_A \varphi) \right],$$

donde φ es un escalar mínimamente acoplado a la gravedad y G es la constante de gravitación. Además, $^{(5)}R$ es el escalar de Ricci en 5D, que es cero para la métrica (3.34).

Como la métrica (3.34) describe una variedad en un vacío aparente en 5D, la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ en (3.35) debe ser

$$(3.36) \quad {}^{(5)}\mathcal{L}(\varphi, \partial_A \varphi) = \frac{1}{2} g^{AB} \partial_A \varphi \partial_B \varphi,$$

la cual representa a un escalar libre. O sea que definimos el vacío como una Lagrangiana puramente cinética en un espacio globalmente plano en 5D (en nuestro caso, la métrica (3.34)). Para describir la métrica en coordenadas físicas hacemos el siguiente cambio de variables:

$$(3.37) \quad t = \psi_0 N, \quad R = \psi_0 r, \quad \psi = \psi,$$

obteniendo así la métrica

$$(3.38) \quad dS^2 = \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^2 \left[dt^2 - e^{2t/\psi_0} dR^2 \right] - d\psi^2,$$

donde t es el tiempo cósmico y $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. Esta métrica es un caso particular de la métrica de Ponce de León (Ponce de León, 1988), y describe una métrica FLRW espacialmente plana, homogénea e isotrópica extendida a 5D en una expansión de de Sitter (Overduin y Wesson, 1997).

3.2.1. Teoría cuántica de campos en un vacío aparente en 5D

Teniendo en cuenta la métrica (3.34) y la Lagrangiana (3.35), podemos obtener la ecuación de movimiento para φ

$$(3.39) \quad \left(2\psi \frac{\partial \psi}{\partial N} + 3\psi^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial N} + \psi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial N^2} - \psi^2 e^{-2N} \nabla_r^2 \varphi - 4\psi^3 \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} - \psi^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0,$$

Entonces, podemos escribir

$$(3.40) \quad \varphi^{**} + 3 \varphi^* - e^{-2N} \nabla_r^2 \varphi - \left[4\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \psi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} \right] = 0,$$

donde la notación con estrella $(\)^*$ es la derivación respecto de N y $\varphi \equiv \varphi(N, \vec{R}, \psi)$. Para simplificarla aún más podemos hacer la transformación $\varphi = \chi e^{-3N/2} \left(\frac{\psi_0}{\psi} \right)^2$, obteniendo de esta manera una ecuación tipo Klein-Gordon generalizada a 5D para el campo redefinido $\chi(N, \vec{r}, \psi)$:

$$(3.41) \quad \chi^{**} - \left[e^{-2N} \nabla_r^2 + \left(\psi^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{1}{4} \right) \right] \chi = 0.$$

El campo χ se puede expandir de la manera usual

$$(3.42) \quad \chi(N, \vec{r}, \psi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_r \int dk_\psi \left[a_{k_r k_\psi} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} + k_\psi \cdot \psi)} \xi_{k_r k_\psi}(N, \psi) + a_{k_r k_\psi}^\dagger e^{-i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} + k_\psi \cdot \psi)} \xi_{k_r k_\psi}^*(N, \psi) \right],$$

donde el asterisco $(\)^*$ simboliza conjugación compleja y $(a_{k_r k_\psi}^\dagger, a_{k_r k_\psi})$ son los operadores de creación y aniquilación, tal que

$$(3.43) \quad [a_{k_r k_\psi}, a_{k'_r k'_\psi}^\dagger] = \delta^{(3)}(\vec{k}_r - \vec{k}'_r) \delta(k_\psi - k'_\psi).$$

$$(3.44) \quad [a_{k_r k_\psi}^\dagger, a_{k'_r k'_\psi}^\dagger] = [a_{k_r k_\psi}, a_{k'_r k'_\psi}] = 0.$$

Además, la relación de conmutación entre χ y $\chi^\star$ es

$$(3.45) \quad \left[\chi(N, \vec{r}, \psi), \chi^\star(N, \vec{r}', \psi') \right] = i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\psi - \psi').$$

Para que la ecuación de conmutación (3.45) se preserve se debe cumplir la siguiente condición de normalización:

$$(3.46) \quad \xi_{k_r k_\psi} \left(\xi_{k_r k_\psi}^\star \right)^* - (\xi_{k_r k_\psi})^* \xi_{k_r k_\psi}^\star = i.$$

Entonces, la ecuación para los modos $\xi_{k_r k_\psi}(N, \psi)$ que satisfacen la condición (3.46) en una expansión de de Sitter en 4D serán

$$(3.47) \quad \xi_{k_r k_\psi}^{\star\star} + \left[e^{-2N} k_r^2 - \left(\frac{1}{4} - \psi^2 k_\psi^2 \right) \right] \xi_{k_r k_\psi} = 0.$$

La solución general para esta ecuación es

$$(3.48) \quad \xi_{k_r k_\psi}(N, \psi) = G_1(\psi) \mathcal{H}_\nu^{(1)}[k_r e^{-N}] + G_2(\psi) \mathcal{H}_\nu^{(2)}[k_r e^{-N}],$$

donde $\mathcal{H}_\nu^{(1,2)}[x] = \mathcal{J}_\nu[x] \pm i \mathcal{Y}_\nu[x]$ son las funciones de Hankel, $\mathcal{J}_\nu[x]$ y $\mathcal{Y}_\nu[x]$ son las funciones de Bessel de primer y segundo tipo, y $\nu = \frac{\sqrt{1-4k_\psi^2 \psi^2}}{2}$. Aquí, las funciones $G_1(\psi)$ y $G_2(\psi)$ son funciones arbitrarias restringidas por la condición de renormalización (3.46)

$$(3.49) \quad [G_1(\psi) - G_2(\psi)][G_1(\psi) + G_2(\psi)] = \frac{\pi}{4}.$$

Elegiremos un vacío de Bunch-Davies generalizado para la última condición: $G_1(\psi) = 0$ y $G_2(\psi) = i \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Las fluctuaciones de φ^2 están dadas por

$$(3.50) \quad \langle \varphi^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_r \int dk_\psi \xi_{k_r k_\psi} \xi_{k_r k_\psi}^*.$$

A partir de $\nu = 3/2$, resulta un espectro de potencia invariante en la escala k_r , para el cual

$$(3.51) \quad i k_\psi = -\frac{\sqrt{2}}{\psi}.$$

Esto significa que k_ψ no se puede asimilar a un número de onda sino a la masa del campo escalar.

3.2.2. Expansión de “de Sitter” en 4D

Podemos tomar una foliación $\psi = \psi_0$ en la métrica (3.38), tal que la métrica efectiva en 4D resulte

$$(3.52) \quad dS^2 \rightarrow ds^2 = dt^2 - e^{2t/\psi_0} dR^2,$$

que describe la expansión globalmente isótropa y homogénea en 4D de un universo espacialmente plano con parámetro de Hubble $H = 1/\psi_0$ (en nuestro caso constante) y un escalar de curvatura ${}^{(4)}\mathcal{R} = 6(\dot{H} + 2H^2)$. Notemos que en este caso particular con parámetro de Hubble constante, resulta $\dot{H} = 0$.

La densidad de energía ρ y la presión p en 4D son (Ledesma y Bellini, 2004)

$$(3.53) \quad 8\pi G \langle \rho \rangle = 3H^2,$$

$$(3.54) \quad 8\pi G \langle p \rangle = -3H^2,$$

donde $G = M_p^{-2}$ es la constante de gravitación y $M_p = 1,2 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$ es la masa de Planck. Por otra parte, una expansión de “de Sitter” se gobierna por una ecuación de estado de vacío: $p = -\rho$, tal que

$$(3.55) \quad \langle \rho \rangle = \left\langle \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{a_0^2}{2a^2} \left(\vec{\nabla} \varphi \right)^2 + V(\varphi) \right\rangle,$$

donde los *bra/kets* denotan el valor esperado respecto del vacío en 4D y la constante cosmológica Λ da la densidad de energía del vacío $\langle \rho \rangle = \frac{\Lambda}{8\pi G}$. Así, Λ está relacionada con la coordenada extra a través de $\Lambda = 3/\psi_0^2$ (Ponce de León, 1988). La Lagrangiana efectiva en 4D queda determinada por

$$(3.56) \quad {}^{(4)}\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = -\sqrt{\left| \frac{{}^{(4)}g}{{}^{(4)}g_0} \right|} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) \right],$$

donde el potencial efectivo (Madriz Aguilar y Bellini, 2004a,b) para la métrica FLRW en 4D es

$$(3.57) \quad V(\varphi) = -\frac{1}{2} g^{\psi\psi} \partial_\psi \varphi \partial_\psi \varphi \Big|_{\psi=\psi_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right)^2 \Big|_{\psi=\psi_0}$$

En nuestro caso el potencial adopta la siguiente forma

$$(3.58) \quad V(\varphi) = \left(\frac{2}{\psi_0^2} - \frac{k_{\psi_0}^2}{2} - \frac{2ik_{\psi_0}}{\psi_0} \right) \varphi^2(t, \vec{R}, \psi_0),$$

donde k_{ψ_0} es el número de onda para $\psi = \psi_0$. La ecuación de movimiento efectiva en 4D para φ es

$$(3.59) \quad \ddot{\varphi} + \frac{3}{\psi_0} \dot{\varphi} - e^{-2t/\psi_0} \nabla_R^2 \varphi - \left[4 \frac{\psi}{\psi_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{\psi^2}{\psi_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} \right] \Big|_{\psi=\psi_0} = 0,$$

lo que significa que la derivada efectiva (con respecto a φ) para el potencial, es

$$(3.60) \quad V'(\varphi) \Big|_{\psi=\psi_0} = \alpha \varphi(\vec{R}, t, \psi_0),$$

con

$$(3.61) \quad \alpha = \frac{2}{\psi_0^2} + k_{\psi_0}^2.$$

Ahora podemos hacer la siguiente transformación:

$$(3.62) \quad \varphi(\vec{R}, t) = e^{-\frac{3t}{2\psi_0}} \chi(\vec{R}, t).$$

Notamos que ahora $\varphi \equiv \varphi(\vec{R} = \psi_0 r, t = \psi_0 N, \psi = \psi_0) = e^{-3t/(2\psi_0)} \chi(\vec{R}, t)$, donde (cita) $\chi(\vec{R}, t) = \chi(\vec{R} = \psi_0 r, t = \psi_0 N, \psi = \psi_0)$:

$$(3.63) \quad \chi(\vec{R}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_R \int dk_\psi \left[a_{k_R k_\psi} e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{R} + k_\psi \cdot \psi)} \xi_{k_R k_\psi}(t, \psi) + c.c. \right] \delta(k_\psi - k_{\psi_0}).$$

Primero obtenemos la siguiente ecuación de Klein-Gordon en 4D para χ

$$(3.64) \quad \ddot{\chi} - \left[e^{-\frac{2t}{\psi_0}} \nabla_R^2 + \frac{9}{4\psi_0^2} - \alpha \right] \chi = 0.$$

La ecuación de movimiento para los modos dependientes del tiempo $\xi_{k_R k_{\psi_0}}(t)$ será

$$(3.65) \quad \ddot{\xi}_{k_R k_{\psi_0}} + \left[k_R^2 e^{-\frac{2t}{\psi_0}} - \left(\frac{9}{4\psi_0^2} - \alpha \right) \right] \xi_{k_R k_{\psi_0}} = 0,$$

donde la masa efectiva al cuadrado μ^2 de los modos $\xi_{k_R k_{\psi_0}}$ está dada por

$$(3.66) \quad \mu^2 = \frac{9}{4\psi_0^2} - \alpha.$$

Aquí, α describe la auto-interacción del término de masa al cuadrado del campo inflatón redefinido χ que se debe a la expansión del universo, y el término $\frac{9}{4\psi_0^2}$ representa el cuadrado de su masa desnuda durante la expansión. Destacamos que ambos términos en (3.66) tienen un origen geométrico debido a que son inducidos por la coordenada extra.

La solución general de la ecuación (3.65) es

$$(3.67) \quad \xi_{k_R k_{\psi_0}} = G_1(\psi_0) \mathcal{H}_{\frac{3-n_s}{2}}^{(1)} \left[k_R \psi_0 e^{-t/\psi_0} \right] + G_2(\psi_0) \mathcal{H}_{\frac{3-n_s}{2}}^{(2)} \left[k_R \psi_0 e^{-t/\psi_0} \right].$$

En esta última $\frac{(3-n_s)}{2} = \sqrt{\frac{9}{4} - (2 + k_{\psi_0}^2 \psi_0^2)}$ y n_s es el índice espectral del espectro de $\langle \varphi^2 \rangle$ en escalas Super Hubble (SH) cuando se considera el vacío de Bunch-Davies: $G_1(\psi_0) = 0$, $G_2(\psi_0) = i\sqrt{\pi}/2$,

$$(3.68) \quad \langle \varphi^2 \rangle|^{SH} = \int_{k_*}^{\epsilon k_0} \frac{dk}{k} \mathcal{P}(t, k) \simeq A(t) \int_{k_*}^{\epsilon k_0} \frac{dk}{k} k^{n_s},$$

donde $A(t)$ es una función dependiente del tiempo, $k_0(t) = \frac{e^{t/\psi_0}}{\psi_0} \sqrt{\frac{9}{4} - \alpha \psi_0^2}$, $\epsilon \ll 1$, $\mathcal{P}(t, k)$ es la potencia del espectro y k_* es el valor absoluto del vector de onda relacionado con la longitud de onda física en el instante de ingreso al horizonte. Esta escala física máxima está respaldada por argumentos causales. Este resultado corresponde al término de auto-interacción efectivo de la masa al cuadrado, α , para el campo inflatón

$$(3.69) \quad \alpha = 2H^2 + k_{\psi_0}^2; \quad \text{para} \quad \psi_0 = 1/H,$$

cuando se considera el enfoque semiclásico estándar en una expansión de de Sitter (Bellini et al., 1996). Para $n_s \ll 1^1$, éste puede aproximarse como $n_s \simeq \frac{2(2+k_{\psi_0}^2 \psi_0^2)}{3}$, donde

$$(3.70) \quad ik_{\psi_0} \simeq -\frac{\sqrt{2-3n_s/2}}{\psi_0} = -\sqrt{2-3n_s/2} H.$$

Se sabe muy bien que el universo tiene un espectro de potencia aproximadamente invariante de escala en escalas cosmológicas (Jaffe et al., 2001), de tal manera que la ecuación (3.70) es una buena aproximación. En tal caso obtenemos las siguientes expresiones evaluadas para $V(\varphi)$ y $V'(\varphi)$:

$$(3.71) \quad V(\varphi)|_{(\psi=\psi_0, n_s=0)} = \frac{(4+2\sqrt{2})}{\psi_0^2} \varphi^2(\vec{R}, t, \psi_0),$$

$$(3.72) \quad V'(\varphi)|_{(\psi=\psi_0, n_s=0)} = 0.$$

donde la ecuación (3.72) corresponde a $\alpha = 0$ en (3.64). Así, α se anula para un espectro de potencia de $\langle \varphi^2 \rangle$ invariante de escala a escalas Super Hubble. Este resultado no concuerda con

¹El valor n_s al que aquí se hace referencia corresponde a $n_s = 1 - n$, siendo $n \simeq 0,96$ el índice espectral medido que figura habitualmente en la bibliografía.

el obtenido usando un tratamiento semiclásico en 4D para el campo inflatón en una expansión de de Sitter (Bellini et al., 1996). Además podemos ver de la ecuación (3.72) que el parámetro de masa efectivo en 4D para φ

$$(3.73) \quad m_{eff}^2 = \frac{2(4 + 2\sqrt{2})}{\psi_0^2},$$

no se anula. Éste describe la masa al cuadrado del inflatón φ inducida geoméricamente por la coordenada extra ψ sobre la hipersuperficie $\psi = \psi_0$. Cuando la auto-interacción está ausente en la expansión de de Sitter: $\alpha = 0$. Es fácil ver que $m_{eff}^2 > \mu^2|_{\alpha=0}$. Sin embargo, ambas masas tienen un origen muy distinto, debido a que μ^2 está relacionado con cada modo $\xi_{k_R k_{\psi_0}}$ de χ y m_{eff}^2 es la masa efectiva al cuadrado del campo no perturbativo $\varphi(\vec{R}, t, \psi_0)$, con efectos de “back-reaction” incluidos.

3.2.2.1. Fluctuaciones en la densidad de energía

Una vez que calculamos los modos $\xi_{k_R k_{\psi_0}}$, podemos obtener el valor esperado para la densidad de energía efectiva en 4D

$$(3.74) \quad \begin{aligned} \langle \rho \rangle_{\psi=\psi_0} &= \frac{e^{-3t/\psi_0}}{(2\pi)^3} \int_{k_*}^{k_p} d^3 k_R \left\{ \left[\frac{(26 + (3 - n_s)^2)}{8\psi_0^2} - \frac{2ik_{\psi_0}}{\psi_0} + \frac{e^{-2t/\psi_0} k_R^2}{2} \right] \xi_{k_R k_{\psi_0}} \xi_{k_R k_{\psi_0}}^* \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \dot{\xi}_{k_R k_{\psi_0}} \dot{\xi}_{k_R k_{\psi_0}}^* - \frac{3}{4\psi_0} \left(\xi_{k_R k_{\psi_0}} \dot{\xi}_{k_R k_{\psi_0}}^* + \dot{\xi}_{k_R k_{\psi_0}} \xi_{k_R k_{\psi_0}}^* \right) \right\}, \end{aligned}$$

donde $k_p = G^{-1/2}$ es el valor absoluto del vector de onda de Planck y k_* es la inversa del radio de Hubble en el instante ($t = t_*$) del ingreso al horizonte.

Por otra parte, si definimos $\langle \rho \rangle_{\psi=\psi_0}^{(0)}$ como el k_R -modo cero del valor esperado en 4D para la densidad de energía

$$(3.75) \quad \begin{aligned} \langle \rho \rangle_{\psi=\psi_0}^{(0)} &= \frac{e^{-3t/\psi_0}}{(2\pi)^3} \int_{k_*}^{k_p} d^3 k_R \left\{ \left[\frac{(26 + (3 - n_s)^2)}{8\psi_0^2} - \frac{2ik_{\psi_0}}{\psi_0} \right] \xi_{0k_{\psi_0}} \xi_{0k_{\psi_0}}^* \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \dot{\xi}_{0k_{\psi_0}} \dot{\xi}_{0k_{\psi_0}}^* - \frac{3}{4\psi_0} \left(\xi_{0k_{\psi_0}} \dot{\xi}_{0k_{\psi_0}}^* + \dot{\xi}_{0k_{\psi_0}} \xi_{0k_{\psi_0}}^* \right) \right\}, \end{aligned}$$

sobre la métrica efectiva en 4D (3.52), entonces las fluctuaciones de la densidad de energía (en escala cosmológica) serán

$$(3.76) \quad \delta\rho/\rho = \frac{\langle \rho \rangle_{\psi=\psi_0} - \langle \rho \rangle_{\psi=\psi_0}^{(0)}}{\langle \rho \rangle_{\psi=\psi_0}}.$$

3.2.2.2. Fluctuaciones en la densidad de energía Super Hubble

Se sabe que el universo es cuasi-invariante de escala en escalas cosmológicas (Jaffe et al., 2001): $|n_s| \ll 1$. Es precisamente por esta razón que consideraremos que el espectro se extiende sobre el rango $k_* < k_R < \epsilon k_0(t)$.

Para calcular las fluctuaciones de la densidad de energía en escalas Super Hubble será útil emplear el límite para argumentos pequeños de la función de Hankel de segundo tipo: $\mathcal{H}_\nu^{(2)}[x] \simeq -\frac{i}{\pi} \Gamma(\nu)(x/2)^{-\nu}$, para $\nu > 0$, que en nuestro caso es válido para describir los modos dependientes del tiempo $\xi_{k_R k_{\psi_0}}$ en la ecuación (3.67) que corresponde al campo φ Super Hubble.

Entonces, en escalas cosmológicas (o sea para $k^2 \ll k_0^2$), las fluctuaciones de la densidad de energía a tiempos grandes, normalizadas en $n_s = 0$ serán aproximadamente (a primer orden en

$n_s)$

$$(3.77) \quad \left. \frac{\delta\rho}{\rho} \right|_{t=t_*}^{SH} \simeq n_s \ln [k_R]_{k_*}^{\epsilon_{k_0}(t_*)},$$

donde t_* es el instante de ingreso al horizonte y hemos usado la expresión (3.70). Nótese que la ecuación (3.77) describe el inicio de $\delta\rho/\rho$ en escalas Super Hubble con respecto a las fluctuaciones de la densidad invariante de escala ($n_s = 0$). Además, la expresión (3.77) es consistente para

$$(3.78) \quad n_s \ln [k_R]_{k_*}^{\epsilon_{k_0}(t_*)} < 1.$$

Entonces, si $k_* e^{-H_* t_*} = H_*$ es el parámetro de Hubble al ingresar al horizonte y considerando $\frac{\epsilon \sqrt{\frac{9}{4} - \alpha \psi_0^2}}{H_* \psi_0} e^{(\psi_0^{-1} - H_*) t_*} > e^{60}$, se obtiene la siguiente desigualdad²:

$$(3.79) \quad 60 < \ln [k_R]_{k_*}^{\epsilon_{k_0}(t_*)} < \frac{1}{n_s},$$

que se cumple para

$$(3.80) \quad n_s < 1/60.$$

Este es un resultado muy importante ya que esta respaldado por datos experimentales (Eidelman et al., 2004). Notaremos aquí algunas diferencias con respecto a los resultados obtenidos usando un desarrollo semiclásico en una expansión de de Sitter:

- Ante todo, el potencial escalar efectivo en 4D parece ser cuadrático en φ (ver ecuación (3.58), mientras que en el tratamiento semiclásico estándar es una constante de valor V_0 (ver (Bellini et al., 1996)).
- El índice espectral depende del término de auto-interacción α de la masa cuadrática (que debería ser muy pequeño si las condiciones de rodadura lenta se mantienen), pero no de la masa del campo inflatón m_{eff} (como en el enfoque semiclásico estándar de inflación). Este resultado sugiere que $k_{\psi_0} \simeq i\sqrt{2}/\psi_0 = i\sqrt{2}H$.
- Además, el parámetro de Hubble en una expansión de de Sitter (como en el enfoque semiclásico de inflación) es constante, pero en nuestro caso su valor viene dado por el inverso multiplicativo de la coordenada extra $H = 1/\psi_0$ para la foliación $\psi = \psi_0$ de la métrica (3.38) Ricci-plana en 5D.

Finalmente, el tratamiento no perturbativo desarrollado para φ puede extenderse a otros modelos inflacionarios más realistas con parámetros de Hubble dependientes del tiempo. Más generalmente, se pueden extender a modelos gobernados dinámicamente por campos escalares.

²En los cálculos estamos considerando $\psi_0^{-1} = H$, que es compatible con la métrica FLRW en 4D (3.52)

Parte II

Neutrinos en agujeros negros

Esta parte de la tesis se aboca al estudio de campos de prueba fermiónicos en el contexto de las métricas de objetos compactos (agujeros negros, agujeros blancos). Las partículas de prueba se encuentran así, sometidas a curvaturas extremas similares a las que habrían dado origen a nuestro universo.

El **Capítulo 4** explora un problema de vieja data, el de los neutrinos en un agujero negro. Se trata de resolver aquí el problema de los modos cuasi-normales en una métrica de Schwarzschild, para familiarizarse con la estructura matemática y los resultados más conocidos en 4D. Notaremos que la gran mayoría las publicaciones relacionadas con el tema se basan en exploraciones numéricas basadas en el método WKB. En nuestro caso ensayamos una resolución semi-analítica, basada en la cuantización de los niveles vibracionales de las moléculas diatómicas, para obtener las autofunciones y los autovalores que resuelven las ecuaciones de Dirac, y a partir de estos últimos obtener la temperatura de Hawking de un agujero negro.

El **Capítulo 5** nos introduce en la primera aplicación directa de los campos de prueba fermiónicos en un contexto de materia inducida. Se explora el problema de los modos cuasi-normales para partículas tipo neutrino con masa en una métrica de Schwarzschild-de Sitter en 4D a partir de campos de prueba sin masa en un vacío pentadimensional. Se debe destacar que la geometría del embebimiento impone sobre la solución modos que no se propagan en la coordenada extra, indicando algún tipo de confinamiento sobre la hipersuperficie 4D. Otro resultado notable es el hecho que las soluciones no divergentes de la ecuación para la coordenada extra tienen como consecuencia una discretización de los valores de la masa inducida.

Capítulo 4

Modos cuasi-normales supersimétricos en un agujero negro de Schwarzschild

Un agujero negro puede ser entendido como un sistema termodinámico para el cual temperatura y entropía (Bardeen et al., 1973) están dadas en términos de sus características globales (masa, carga y momento angular). Se obtienen al resolver una ecuación de onda para pequeñas fluctuaciones sujetas a las condiciones de que el flujo sea entrante en el horizonte y saliente en el infinito asintótico. Generalmente, estas condiciones conducen a un conjunto de autofrecuencias complejas discretas, donde la parte real representa la frecuencia de las oscilaciones y la parte imaginaria representa el término de decaimiento. Las frecuencias y el tiempo de decaimiento de las oscilaciones cuasi-normales, denominados *modos cuasi-normales*, quedan unívocamente determinados por los parámetros del agujero negro y son independientes de los estados iniciales de las perturbaciones. Debería ser posible inferir los parámetros de los agujeros negros exclusivamente a partir de dichas frecuencias. Los modos cuasi-normales son portadores de información de agujeros negros y estrellas de neutrones, por lo cual son de gran importancia para la astronomía de ondas gravitacionales (Kokkotas y Schmidt, 1999; Chandrasekhar, 1983; Bartnik y McKinnon, 1988; Bizon, 1990; Breitenlohner et al., 1994; Künzle y Masood-ul-Alam, 1990; Smoller y Wasserman, 1993; Straumann y Zhou, 1990). Estas oscilaciones son producidas principalmente durante la fase de formación de objetos estelares compactos y podrían llegar a ser suficientemente intensas para ser detectadas por algunos de los grandes detectores de ondas gravitacionales actualmente en construcción. Existe gran cantidad de bibliografía reciente sobre modos cuasi-normales con partículas de diferente espín en el espacio-tiempo de un agujero negro y se espera que el tema reciba aún más atención (Cho, 2003; Nataro y Schiappa, 2004; Cho, 2006).

Algunos modelos numéricos predicen que los modos cuasi-normales son preponderantes en las ondas gravitacionales asociadas con procesos que involucran agujeros negros, tales como la formación de agujeros negros en un colapso gravitacional o la fusión de sistemas binarios. Es por eso que los detectores de ondas gravitacionales que están actualmente en construcción podrían captar esas señales para investigar la población de agujeros negros en el universo. A pesar de la importancia que tienen en astrofísica, hay muchas otras razones por las cuales uno podría estar interesado en el estudio del espectro de las oscilaciones de un agujero negro. Por otro lado, los modos cuasi-normales han jugado un rol muy importante en los cálculos de la estabilidad de agujeros negros (Whiting, 1989; Beyer, 2001). Recientes investigaciones en dimensiones extra no compactas han dado lugar a la predicción un tanto sorprendente de que *mini agujeros negros* podrían ser observados en aceleradores de partículas tales como el LHC (Argyres et al., 1998; Dimopoulos y Landsberg, 2001; Giddings y Thomas, 2002). Existen problemas cuando se intenta explicar la ruptura de fermiones en quarks y leptones (Arkani-Hamed y Schmaltz, 2000; Arkani-Hamed et al., 2000; Han et al., 2003). La mayoría de los métodos para evaluar modos cuasi-normales son numéricos. Recientemente fueron evaluados los modos cuasi-normales en una métrica de Schwarzschild (Cho, 2003). Además, fue aplicado con éxito el método WKB a esta

clase de problemas (Schutz y Will, 1985), y fue extendido a órdenes superiores (Iyer y Will, 1987). Particularmente, la interacción de fermiones con un campo gravitacional es un tema muy importante que ha sido abordado en un artículo seminal por Brill y Wheeler (Brill y Wheeler, 1957) y posteriormente por otros (Barducci et al., 1977; Cho y Lin, 2005; Shu y Shen, 2004; Batic y Nowakowski, 2008). Es bien conocido que la ecuación de campo espinorial en un espacio-tiempo de Schwarzschild puede ser separada, y las partes angular y temporal pueden ser integradas. Nos queda así una ecuación radial cuya integración no es inmediata. La ecuación de Schrödinger resultante ha recibido gran atención y sus soluciones son modos cuasi-normales.

Como es sabido, el neutrino no responde directamente a los campos eléctricos o magnéticos. Por lo tanto, si uno desea influenciar su órbita con campos gravitacionales, se tiene que considerar la física del neutrino en un espacio-tiempo curvo. En este capítulo estudiaremos este tópico usando el formalismo de Fock-Ivanenko y la idea de supersimetría (SUSY) para estudiar la propagación de un neutrino afectado por un campo gravitacional producido por un agujero negro. Para conseguir este objetivo estudiaremos soluciones analíticas aproximadas para la ecuación de Dirac de un fermión no masivo de espín 1/2 en las cercanías de un agujero negro de Schwarzschild sin carga ni rotación. Sobre este tema se ha publicado recientemente un estudio con métodos numéricos en un espacio-tiempo en $(d + 1)$ dimensiones, donde las $(d - 3)$ dimensiones extra son compactas (Cho et al., 2007). Aquí desarrollaremos el formalismo de Fock-Ivanenko en el contexto de las propiedades supersimétricas de la ecuación del Hamiltoniano de Schrödinger.

El capítulo está organizado de la siguiente forma: en la siguiente sección obtendremos la ecuación de Dirac para un fermión no masivo de espín 1/2 sin carga (neutrino), en un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico, usando el formalismo de Fock-Ivanenko. En la sección 4.2 se obtendrá una ecuación radial para el espinor sobre la métrica mencionada. Veremos que los espinores obedecen ecuaciones de Schrödinger estacionarias. En la sección 4.3 estudiaremos estas ecuaciones para un agujero negro de Schwarzschild. En la sección 4.4 se introducirán las propiedades supersimétricas de los potenciales radiales efectivos de las ecuaciones de Schrödinger. En la sección 4.5 obtendremos soluciones analíticas aproximadas de las frecuencias cuasi-normales y sus autoestados, así como sus compañeras supersimétricas. En la sección 4.7 comentaremos los resultados más relevantes del capítulo.

4.1. Ecuación de Dirac para un neutrino en un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico.

Consideremos un elemento de línea que describe un espacio-tiempo tetradimensional estático y esféricamente simétrico

$$(4.1) \quad d\bar{s}^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

donde Ω es el elemento de ángulo sólido, tal que $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$. A partir de aquí utilizaremos unidades naturales: $\hbar = c = 1$. La ecuación de Dirac para fermiones $\bar{\Psi}$ no masivos y libres con espín 1/2 sobre la métrica (4.1) es

$$(4.2) \quad \bar{\gamma}^\mu \nabla_\mu \bar{\Psi} = 0,$$

donde $\bar{\nabla}_\mu$ representa la componente μ -ésima de la derivada covariante y $\bar{\gamma}^\mu$ son las matrices de Dirac en la métrica (4.1). Usando transformaciones conformes obtenemos

$$(4.3) \quad \bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \Theta^2 \bar{g}_{\mu\nu},$$

$$(4.4) \quad \bar{\Psi} \rightarrow \Psi = \Theta^{-3/2} \bar{\Psi},$$

$$(4.5) \quad \bar{\gamma}^\mu \bar{\nabla}_\mu \bar{\Psi} \rightarrow \Theta^{5/2} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi,$$

donde $\Theta = 1/r$, de forma que $\Psi = r^{3/2}\bar{\Psi}$. La métrica resultante es

$$(4.6) \quad ds^2 = \frac{f}{r^2} dt^2 - \frac{1}{fr^2} dr^2 - d\Omega^2,$$

para la que vale

$$(4.7) \quad \gamma_\mu \nabla^\mu \Psi = 0.$$

Los espinores $\chi^{(\uparrow\downarrow)}(\theta, \phi)$ sobre la 2-esfera obedecen a la ecuación¹ (Berestetskii et al., 1971)

$$(4.8) \quad \gamma_i \nabla^i \chi_l^{(\uparrow\downarrow)} = i \begin{pmatrix} l+1 \\ -l \end{pmatrix} \chi_l^{(\uparrow\downarrow)} = i(\kappa_{\uparrow\downarrow}) \chi_l^{(\uparrow\downarrow)},$$

donde los autovalores pueden ser

$$(4.9) \quad \kappa_{\uparrow\downarrow} = \begin{pmatrix} l+1 \\ -l \end{pmatrix}.$$

Nótese que $(\kappa_{\uparrow\downarrow})$ pueden ser enteros, aunque el cero está excluido: $(\kappa_{\uparrow\downarrow}) \neq 0$. Si expandimos la función Ψ como

$$(4.10) \quad \Psi = \sum_l \left(\phi_l^{(\uparrow)} \chi_l^{(\uparrow)} + \phi_l^{(\downarrow)} \chi_l^{(\downarrow)} \right),$$

las ecuaciones de movimiento para $\phi_l^{(\uparrow)}$ y $\phi_l^{(\downarrow)}$ quedan representadas por (Camporesi y Higuchi, 1996)

$$(4.11) \quad \{ \gamma^0 \nabla_0 + \gamma^1 \nabla_1 + i(l+1) \gamma^5 \} \phi_l^{(\uparrow)} = 0, \quad l = 0, 1, \dots,$$

$$(4.12) \quad \{ \gamma^0 \nabla_0 + \gamma^1 \nabla_1 - i l \gamma^5 \} \phi_l^{(\downarrow)} = 0, \quad l = 1, 2, \dots,$$

donde usamos coordenadas (t, r, θ, ϕ) y la matriz $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ se denomina *de interacción*. Con el objetivo de resolver las ecuaciones (4.11) y (4.12), usaremos el formalismo de Fock-Ivanenko (Snygg, 1997). Para representar al sistema, elegimos las siguientes matrices de Dirac:

$$(4.13) \quad \gamma^t = -i \frac{r}{\sqrt{f(r)}} \sigma^3, \quad \gamma^r = r \sqrt{f(r)} \sigma^2,$$

donde las σ^i son matrices de Pauli

$$(4.14) \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de tal forma que las conexiones espinoriales, $\Gamma_\mu = \frac{1}{4} \gamma^\eta \gamma^\nu \partial_\eta g_{\nu\mu}$, están dadas por²

$$(4.15) \quad \Gamma_t = \sigma^1 \left(\frac{r^2}{4} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r^2} \right), \quad \Gamma_r = \Gamma_\theta = \Gamma_\phi = 0.$$

4.2. Ecuaciones de movimiento para $\phi_l^{(\uparrow\downarrow)}$.

Estudiaremos las ecuaciones dinámicas para cada uno de los espinores $\phi_l^{(\uparrow)}$ y $\phi_l^{(\downarrow)}$.

¹Notación: en lo que sigue usaremos la notación compacta $\uparrow$ para espinores *arriba* y $\downarrow$ para espinores *abajo*. Por ejemplo, al escalar $\kappa_\uparrow = l+1$ le corresponde $\chi^{(\uparrow)}$ y al $\kappa_\downarrow = -l$ le corresponde $\chi^{(\downarrow)}$.

²Ver, por ejemplo, la página 113 - capítulo 6 - del libro (Snygg, 1997).

4.2.1. Espinor $\phi_l^{(\uparrow)}$.

La ecuación de movimiento para $\phi_l^{(\uparrow)}$ (la ecuación para $\phi_l^{(\downarrow)}$ se obtiene siguiendo el mismo procedimiento), es

$$(4.16) \quad \sigma_2 r \sqrt{f(r)} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{r}{2\sqrt{f(r)}} \frac{d}{dr} \left(\frac{\sqrt{f(r)}}{r} \right) \right] \phi_l^{(\uparrow)} - i\sigma_1 (l+1) \phi_l^{(\uparrow)} = i\sigma_3 \left(\frac{r}{\sqrt{f(r)}} \right) \frac{\partial \phi_l^{(\uparrow)}}{\partial t}.$$

Proponemos soluciones del tipo

$$(4.17) \quad \phi_l^{(\uparrow)}(r, t) = \left(\frac{\sqrt{f(r)}}{r} \right)^{-1/2} e^{-iE_n^{(\uparrow)} t} \begin{pmatrix} i \psi_1^{(\uparrow)}(r) \\ \psi_2^{(\uparrow)}(r) \end{pmatrix},$$

donde $E_n^{(\uparrow)}$ es cierta constante de integración. Con esta transformación, la ecuación de Dirac puede escribirse como un sistema de dos ecuaciones acopladas de primer orden

$$(4.18) \quad f(r) \frac{d\psi_1^{(\uparrow)}}{dr} - \frac{\sqrt{f(r)}}{r} (l+1) \psi_1^{(\uparrow)}(r) = E_n^{(\uparrow)} \psi_2^{(\uparrow)}(r),$$

$$(4.19) \quad f(r) \frac{d\psi_2^{(\uparrow)}}{dr} + \frac{\sqrt{f(r)}}{r} (l+1) \psi_2^{(\uparrow)}(r) = -E_n^{(\uparrow)} \psi_1^{(\uparrow)}(r).$$

Ahora introducimos la *coordenada tortuga* (cita) u y la función $W(r)$

$$(4.20) \quad f(r) \frac{d}{dr} = \frac{d}{du}, \quad W^{(\uparrow)}(r) = \frac{(l+1)}{r} \sqrt{f(r)},$$

de tal forma que las ecuaciones (4.18) y (4.19) se convierten respectivamente en

$$(4.21) \quad \left[\frac{d}{du} - W^{(\uparrow)}(u) \right] \psi_1^{(\uparrow)}(u) = E_n^{(\uparrow)} \psi_2^{(\uparrow)}(u),$$

$$(4.22) \quad \left[\frac{d}{du} + W^{(\uparrow)}(u) \right] \psi_2^{(\uparrow)}(u) = -E_n^{(\uparrow)} \psi_1^{(\uparrow)}(u).$$

Para que queden desacopladas, se sustituye el término fuente de cualquiera de ellas en la otra y se obtiene el siguiente sistema desacoplado de segundo orden:

$$(4.23) \quad \left(-\frac{d^2}{du^2} + V_1^{(\uparrow)}(u) \right) \psi_1^{(\uparrow)}(u) = \left[E_n^{(\uparrow)} \right]^2 \psi_1^{(\uparrow)}(u),$$

$$(4.24) \quad \left(-\frac{d^2}{du^2} + V_2^{(\uparrow)}(u) \right) \psi_2^{(\uparrow)}(u) = \left[E_n^{(\uparrow)} \right]^2 \psi_2^{(\uparrow)}(u),$$

tal que los potenciales supersimétricos $V_1^{(\uparrow)}$ y $V_2^{(\uparrow)}$ están dados por la expresión

$$(4.25) \quad V_{1,2}^{(\uparrow)}(u) = \mp \frac{dW^{(\uparrow)}}{du} + \left[W^{(\uparrow)}(u) \right]^2.$$

Los potenciales efectivos en (4.25) son supersimétricos, por lo que las funciones $\psi_1^{(\uparrow)}$ y $\psi_2^{(\uparrow)}$ tienen el mismo espectro de dispersión y modos cuasi-normales.

4.2.2. Espinor $\phi_l^{(\downarrow)}$.

De la misma forma que para $\phi_l^{(\uparrow)}$ uno puede obtener las ecuaciones de Schrödinger al proponer las soluciones

$$(4.26) \quad \phi_l^{(\downarrow)}(r, t) = \left(\frac{\sqrt{f(r)}}{r} \right)^{-1/2} e^{-iE_n^{(\downarrow)} t} \begin{pmatrix} i \psi_1^{(\downarrow)}(r) \\ \psi_2^{(\downarrow)}(r) \end{pmatrix},$$

con el siguiente superpotencial $W^{(\downarrow)}(r)$:

$$(4.27) \quad W^{(\downarrow)}(r) = -\frac{l}{r} \sqrt{f(r)}.$$

En este caso las ecuaciones de Schrödinger para $\psi_1^{(\downarrow)}$ y $\psi_2^{(\downarrow)}$ son

$$(4.28) \quad \left(-\frac{d^2}{du^2} + V_1^{(\downarrow)}(u) \right) \psi_1^{(\downarrow)}(u) = \left[E_n^{(\downarrow)} \right]^2 \psi_1^{(\downarrow)}(u),$$

$$(4.29) \quad \left(-\frac{d^2}{du^2} + V_2^{(\downarrow)}(u) \right) \psi_2^{(\downarrow)}(u) = \left[E_n^{(\downarrow)} \right]^2 \psi_2^{(\downarrow)}(u),$$

con los potenciales $V_{1,2}^{(\downarrow)}(u)$ dados por

$$(4.30) \quad V_{1,2}^{(\downarrow)}(u) = \mp \frac{dW^{(\downarrow)}}{du} + \left[W^{(\downarrow)}(u) \right]^2.$$

Las ecuaciones (4.23-4.24) y (4.28-4.29) nos dan información sobre la parte radial de las funciones de onda espinoriales $\phi_l^{(\uparrow, \downarrow)}(r, t)$. En las siguientes secciones consideraremos un tratamiento analítico para resolver las parejas de ecuaciones de Schrödinger (4.23-4.24) y (4.28-4.29), en las cercanías de un agujero negro de Schwarzschild.

4.3. Neutrinos en un agujero negro de Schwarzschild.

Tomaremos el caso particular

$$(4.31) \quad f(r) = 1 - \frac{a}{r},$$

tal que $a = 2GM$ es el radio de Schwarzschild. En este caso la coordenada tortuga $u(r)$ está dada por

$$(4.32) \quad u(r) = r + a \ln \left[\frac{r}{a} - 1 \right], \quad \text{o,} \quad u(r) = \frac{a}{1 - f(r)} + a \ln \left[\frac{f(r)}{1 - f(r)} \right].$$

De la segunda expresión en (4.32), obtenemos

$$(4.33) \quad [1 - f(u)] = \frac{1}{1 + LW(e^{(u-a)/a})},$$

donde $LW(x)$ es la función de Lambert, definida por $LW(x) e^{LW(x)} = x$ y tal que $LW(0) = 0$. Ahora, queremos obtener los potenciales $V_{1,2}^{(\uparrow, \downarrow)}(u)$ en función de u . Tomando las ecuaciones (4.20) y (4.27) en las segundas expresiones de (4.32) y (4.33), obtenemos finalmente los superpotenciales

$$(4.34) \quad W^{(\uparrow, \downarrow)}(u) = \frac{(\kappa_{\uparrow, \downarrow})}{a} \frac{[LW(e^{(u-a)/a})]^{1/2}}{[1 + LW(e^{(u-a)/a})]^{3/2}}.$$

Los potenciales exactos escritos en función de u son,

$$(4.35) \quad V_{1,2}^{(\uparrow\downarrow)}(u) = \left[W^{(\uparrow\downarrow)} \right]^2(u) \pm \frac{dW^{(\uparrow\downarrow)}(u)}{du} = \frac{(\kappa_{\uparrow\downarrow})^2}{a^2} \frac{LW[e^{(u-a)/a}]}{[1 + LW[e^{(u-a)/a}]]^3} \\ \mp \frac{1}{2} \frac{(\kappa_{\uparrow\downarrow})}{a^2} \frac{[2LW[e^{(u-a)/a}] - 1]}{[1 + LW[e^{(u-a)/a}]]^{7/2}} \sqrt{LW[e^{(u-a)/a}]}.$$

Consideraremos el caso límite donde la partícula se encuentra cerca del radio de Schwarzschild: $u \rightarrow -\infty$, por lo que $e^{(u-a)/a} \rightarrow 0$. La función de Lambert tiene un desarrollo en serie de potencias $LW(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \dots$, por lo que en este caso $LW(x) \approx x$ y los potenciales efectivos se pueden aproximar de la siguiente manera:

$$(4.36) \quad V_{1,2}^{(\uparrow\downarrow)}(u) \simeq \frac{(\kappa_{\uparrow\downarrow})^2}{a^2} e^{(u-a)/a} \pm \frac{(\kappa_{\uparrow\downarrow})}{2a^2} e^{(u-a)/(2a)}.$$

Para poder realizar una descripción adimensional del problema haremos la transformación: $2v = -(u-a)/a$, y las ecuaciones de Schrödinger (4.23) y (4.24) para $\psi_1^{(\uparrow\downarrow)}(v)$ y $\psi_2^{(\uparrow\downarrow)}(v)$, cerca del radio de Schwarzschild, se convierten en

$$(4.37) \quad \left\{ -\frac{d^2}{dv^2} + 4(\kappa_{\uparrow\downarrow})^2 e^{-2v} \pm 2(\kappa_{\uparrow\downarrow}) e^{-v} - 4a^2 \left(\frac{[E_n^{(i,\uparrow\downarrow)}]^2}{[E_n^{(j,\uparrow\downarrow)}]^2} \right) \right\} \begin{pmatrix} \psi_i^{(\uparrow\downarrow)}(\alpha, l, v) \\ \psi_j^{(\uparrow\downarrow)}(\beta, l, v) \end{pmatrix} = 0,$$

donde $E_n^{(i,\uparrow\downarrow)} = E_n^{(j,\uparrow\downarrow)}$, y

$$(4.38) \quad i = 1, \quad j = 2 \quad \alpha = n+1, \quad \beta = n, \quad \text{para} \quad \phi_l^{(\uparrow)},$$

$$(4.39) \quad i = 2, \quad j = 1 \quad \alpha = n, \quad \beta = n+1, \quad \text{para} \quad \phi_l^{(\downarrow)}.$$

Nótese que para r grande se obtiene $u \rightarrow -\infty$, por lo tanto $V_{1,2}^{(\uparrow\downarrow)} \rightarrow 0$. Esto significa que el potencial aproximado (4.36) se anula a grandes distancias y toma el mismo valor asintótico que los potenciales exactos (4.35). Así, las soluciones asintóticas de (4.37) serán buenas aproximaciones para r grande. Sin embargo, el potencial aproximado (4.36) no es una buena aproximación para distancias intermedias.

4.4. Supersimetría de los operadores Hamiltonianos.

Consideramos aquí los operadores Hamiltonianos $H_1^{(\uparrow\downarrow)}$ y $H_2^{(\uparrow\downarrow)}$

$$(4.40) \quad H_1^{(\uparrow\downarrow)} = -\frac{d^2}{dv^2} + [W^{(\uparrow\downarrow)}]^2(v) - \frac{dW^{(\uparrow\downarrow)}(v)}{dv},$$

$$(4.41) \quad H_2^{(\uparrow\downarrow)} = -\frac{d^2}{dv^2} + [W^{(\uparrow\downarrow)}]^2(v) + \frac{dW^{(\uparrow\downarrow)}(v)}{dv},$$

tal que $H_2^{(\uparrow\downarrow)} - H_1^{(\uparrow\downarrow)} = \frac{2dW^{(\uparrow\downarrow)}(v)}{dv}$. En nuestro caso $W^{(\uparrow\downarrow)}(v) \simeq -2(\kappa_{\uparrow\downarrow})e^{-v}$,³ de tal forma que obtenemos $H_1^{(\uparrow\downarrow)} - H_2^{(\uparrow\downarrow)} = 2W^{(\uparrow\downarrow)}(v)$. Siguiendo a Mielnik (Mielnik, 1984), definimos los siguientes operadores diferenciales:

$$(4.42) \quad b_{(\uparrow\downarrow)}^* = -\frac{d}{dv} + W^{(\uparrow\downarrow)}(v),$$

$$(4.43) \quad b_{(\uparrow\downarrow)} = \frac{d}{dv} + W^{(\uparrow\downarrow)}(v).$$

³En realidad, existe una familia de soluciones $W^{(\uparrow\downarrow)}(v) = \frac{C2(\kappa_{\uparrow\downarrow})e^{-v} \text{Ei}(1, -4(\kappa_{\uparrow\downarrow})e^{-v}) - 2(\kappa_{\uparrow\downarrow})e^{-v}}{C \text{Ei}(1, -4(\kappa_{\uparrow\downarrow})e^{-v}) + 1}$, para $\text{Ei}(a, z) = z^{a-1} \Gamma(1-a, z)$, que nos da los potenciales supersimétricos $V_{1,2}^{(\uparrow\downarrow)}(v) = 4(\kappa_{\uparrow\downarrow})^2 e^{-2v} \pm 2(\kappa_{\uparrow\downarrow})e^{-v}$, aunque restringiremos nuestro estudio a la solución particular con $C = 0$.

Ahora, podemos hacer que los Hamiltonianos (4.40) y (4.41) puedan reescribirse en términos de $b_{(\uparrow\downarrow)}$ y $b_{(\uparrow\downarrow)}^*$:

$$\begin{aligned}
 (4.44) \quad b_{(\uparrow\downarrow)}^* b_{(\uparrow\downarrow)} &= b_{(\uparrow\downarrow)} b_{(\uparrow\downarrow)}^* + [b_{(\uparrow\downarrow)}^*, b_{(\uparrow\downarrow)}] \\
 &= b_{(\uparrow\downarrow)} b_{(\uparrow\downarrow)}^* + 2W^{(\uparrow\downarrow)}(v) \\
 &= H_2^{(\uparrow\downarrow)} + 2W^{(\uparrow\downarrow)}(v) = H_1^{(\uparrow\downarrow)}.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, $H_i^{(\uparrow\downarrow)} b_{(\uparrow\downarrow)}^* = b_{(\uparrow\downarrow)}^* b_{(\uparrow\downarrow)} b_{(\uparrow\downarrow)}^* = b_{(\uparrow\downarrow)}^* H_j^{(\uparrow\downarrow)}$, lo que significa que

$$\begin{aligned}
 (4.45) \quad H_i^{(\uparrow\downarrow)} (b_{(\uparrow\downarrow)}^* \psi_j^{(\uparrow\downarrow)}) &= b_{(\uparrow\downarrow)}^* (H_j^{(\uparrow\downarrow)} \psi_j^{(\uparrow\downarrow)}) \\
 &= b_{(\uparrow\downarrow)}^* \left([E_n^{(\uparrow\downarrow)}]^2 \psi_j^{(\uparrow\downarrow)} \right) \\
 &= [E_n^{(\uparrow\downarrow)}]^2 (b_{(\uparrow\downarrow)}^* \psi_j^{(\uparrow\downarrow)}).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\psi_j^{(\uparrow\downarrow)}(\alpha, l, v)$ es un autovector de $H_j^{(\uparrow\downarrow)}$ con autovalor $[E_n^{(\uparrow\downarrow)}]^2$, entonces $\psi_i^{(\uparrow\downarrow)}(\alpha, l, v) = b_{(\uparrow\downarrow)}^* \psi_j^{(\uparrow\downarrow)}(\beta, l, v)$ será un autovector de $H_i^{(\uparrow\downarrow)}$ con autovalor $[E_n^{(\uparrow\downarrow)}]^2$. De otra manera, los potenciales $V_i^{(\uparrow\downarrow)}$ y $V_j^{(\uparrow\downarrow)}$ poseen el mismo espectro de frecuencias cuasi-normales (pero con diferentes autoestados), debido a que son compañeros supersimétricos obtenidos de los mismos superpotenciales $W^{(\uparrow\downarrow)}(v)$. Es importante recordar que en los casos que $E_n^{(\uparrow\downarrow)}$ no sea real, los Hamiltonianos no serán hermíticos.

4.5. Soluciones aproximadas.

Para resolver las ecuaciones (4.37) debemos considerar su validéz sólo cerca del horizonte de Schwarzschild: $r \geq a$. En este límite, $v \rightarrow \infty$. Tomaremos separadamente los casos para los potenciales $V_1^{(\uparrow\downarrow)}$ y $V_2^{(\uparrow\downarrow)}$, correspondientes a los espinores $\phi_l^{(\uparrow\downarrow)}$.

4.5.1. Espinor $\phi_l^{(\uparrow)}$.

El primer caso a tratar es el de las ecuaciones radiales para el espinor $\phi_l^{(\uparrow)}$. Analizaremos a continuación, los potenciales atractivo y repulsivo de la ecuación (4.25), separadamente.

4.5.1.1. Potencial atractivo para $\phi_l^{(\uparrow)}$.

El primer caso es para el potencial

$$(4.46) \quad V_2^{(\uparrow)}(l, v) = 4(l+1)^2 e^{-2v} - 2(l+1) e^{-v},$$

que es similar (aunque no exactamente) al potencial de Morse (Morse, 1929)⁴. El potencial de Morse es un modelo realista para la energía potencial de una molécula diatómica. Como aproximación a su espectro de oscilaciones es mucho mejor que la del oscilador armónico cuántico,

⁴Es interesante notar que el potencial de enlace original de Morse $V(v) = S^2 (e^{-2v} - e^{-v})$ corresponde a un caso Hermítico con solución exacta, o sea, con autovalores de energía reales. Sin embargo, como fue demostrado en (Cho y Ho, 2007), es posible extender la teoría para potenciales con solución exacta (Turbiner y Ushveridze, 1987; Turbiner, 1988) y con solución quasi-exacta (González-López et al., 1993), para dar cabida a soluciones en términos de modos cuasi-normales.

debido a que incluye explícitamente efectos de ruptura de enlace, al existir estados no ligados en la estructura del modelo. La solución general para (4.37) viene dada por

$$(4.47) \quad \psi_2^{(\dagger)}(n, l, v) \simeq e^{-v/2} [\mathcal{I}_{\nu_1}[z(v)] - \mathcal{I}_{\nu_2}[z(v)]] \left[B_{nl} + C_{nl} \int \frac{dv e^v}{[\mathcal{I}_{\nu_1}[z(v)] - \mathcal{I}_{\nu_2}[z(v)]]^2} \right],$$

donde $\mathcal{I}_{\nu_1}[z(v)]$ y $\mathcal{I}_{\nu_2}[z(v)]$ son las funciones de Bessel modificadas de primera especie, con

$$(4.48) \quad \nu_{1,2} = 2ia E_n^{(\dagger)} \mp \frac{1}{2},$$

$$(4.49) \quad z(v) = 2(l+1) e^{-v}.$$

Se puede demostrar [ver apéndice B] que los autovalores de energía son⁵:

$$(4.50) \quad E_n^{(2,\dagger)} = -i \frac{n}{2a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

y los autovalores para el momento angular son $l \geq 0$. Para evitar una posible divergencia en (4.47), tomamos $C_{nl} = 0$. Un caso particular, el cual es una manifestación de la supersimetría de la Hamiltoniana, está relacionado con el autovalor de energía nulo: $E_{n=0}^{(\dagger)} = 0$. En este caso $n = 0$ y la solución es

$$(4.51) \quad \psi_2^{(\dagger)}(0, l, v) \simeq B_{0l} e^{-v/2} [\mathcal{I}_{-1/2}[z(v)] - \mathcal{I}_{1/2}[z(v)]] \propto e^{-2(l+1)e^{-v}},$$

donde B_{0l} es una constante que se puede determinar por normalización. El compañero supersimétrico de $\psi_2^{(\dagger)}(n, l, v)$ puede obtenerse al aplicar el operador $b_{\dagger}^*$ al autoestado $\psi_2^{(\dagger)}(n, l, v)$

$$(4.52) \quad \psi_1^{(\dagger)}(n+1, l, v) = \left\{ -\frac{d}{dv} + 2(l+1)e^{-v} \right\} \psi_2^{(\dagger)}(n, l, v).$$

La correspondencia en (4.52) es una manifestación del carácter supersimétrico de los Hamiltonianos $H_1^{(\dagger)}$ and $H_2^{(\dagger)}$.

4.5.1.2. Potencial repulsivo para $\phi_l^{(\dagger)}$.

Ahora trabajaremos con el potencial SUSY respecto a (4.46)

$$(4.53) \quad V_1^{(\dagger)}(v) = 4(l+1)^2 e^{-2v} + 2(l+1) e^{-v},$$

que difiere en el signo del último término respecto a (4.46). En este caso la solución general esta dada por

$$(4.54) \quad \psi_1^{(\dagger)}(n+1, l, v) \simeq \bar{B}_{nl} \left\{ \left[(l+1)e^{-v/2} + \left(n + \frac{1}{2} \right) e^{v/2} \right] \mathcal{I}_{\mu_1}[z(v)] + e^{-v/2}(l+1)\mathcal{I}_{\mu_2}[z(v)] \right\} + \bar{C}_{nl} \left\{ \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) e^{v/2} + (l+1)e^{-v/2} \right] \mathcal{I}_{\mu_1}[z(v)] + (l+1)e^{-v/2}\mathcal{I}_{\mu_2}[z(v)] \right\} 4^{-(n+2)} \\ \times \int \frac{dv e^v}{\{ [l+1 + (n + \frac{1}{2}) e^v] \mathcal{I}_{\mu_1}[z(v)] + (l+1)\mathcal{I}_{\mu_2}[z(v)] \}^2},$$

donde

$$(4.55) \quad \mu_1 = n + 1/2, \quad \mu_2 = n + 3/2,$$

$$(4.56) \quad z(v) = 2(l+1) e^{-v}.$$

⁵En general la energía puede tomar los valores $E_n^{(\dagger)} = \mp in/(2a)$, aunque elegiremos los autovalores con signo menos debido a que son los que corresponden a modos que decaen.

Para que se cumpla la expresión para las parejas supersimétricas (4.52), pedimos $\bar{B}_{nl} = 0$. Entonces resultarán constantes no nulas B_{nl} en la expresión (4.47) y las $\bar{C}_{nl}$ en (4.54) serán determinadas por normalización. Ya se ha demostrado [ver apéndice B] que los autovalores de energía son

$$(4.57) \quad E_n^{(1,\uparrow)} = -i \frac{(n+1) - 1}{2a} = -i \frac{n}{2a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Es importante recordar que $E_n^{(2,\uparrow)} = E_n^{(1,\uparrow)}$ [ver ecuación (4.37)], debido a que los potenciales $V_2^{(\uparrow)}(v)$ y $V_1^{(\uparrow)}(v)$ pertenecen a Hamiltonianos supersimétricos.

4.5.2. Espinor $\phi_l^{(\downarrow)}$.

Por completitud consideraremos ahora las ecuaciones radiales para el espinor $\phi_l^{(\downarrow)}$, para los potenciales atractivo y repulsivo dados por (4.30).

4.5.2.1. Potencial atractivo para $\phi_l^{(\downarrow)}$.

El potencial atractivo relacionado con $\kappa^{(\downarrow)} = -l$, está dado por la siguiente expresión:

$$(4.58) \quad V_1^{(\downarrow)}(v) = 4l^2 e^{-2v} - 2l e^{-v}.$$

Así, la solución general de (4.37) será

$$(4.59) \quad \begin{aligned} \psi_1^{(\downarrow)}(n, l, v) &\simeq e^{-v/2} \{ \alpha_{nl} [\mathcal{I}_{n-1/2} [-2e^{-v}] + \mathcal{I}_{n+1/2} [-2e^{-v}]] \\ &+ \beta_{nl} [\mathcal{K}_{n-1/2} [-2e^{-v}] - \mathcal{K}_{n+1/2} [-2e^{-v}]] \}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{K}_{n\mp 1/2}$ son funciones de Bessel modificadas de segunda especie, y las frecuencias cuasi-normales son

$$(4.60) \quad E_n^{(1,\downarrow)} = -i \frac{n}{2a}, \quad n = 0, 1, \dots$$

El caso particular con $n = 0$ nos da el autovalor de energía para el estado fundamental $E_{n=0}^{(1,\downarrow)} = 0$, que corresponde al autoestado

$$(4.61) \quad \Psi_1^{(\downarrow)}(0, l, v) = \alpha_{0l} e^{-2l e^{-v}},$$

donde hemos hecho $\beta_{nl} = 0$, para que la autofunción sea finita en todo el dominio de v .

4.5.2.2. Potencial repulsivo para $\phi_l^{(\downarrow)}$.

Finalmente, consideramos el potencial repulsivo asociado a $\kappa^{(\downarrow)} = -l$, cuya forma es

$$(4.62) \quad V_2^{(\downarrow)}(v) = 4l^2 e^{-2v} + 2l e^{-v}.$$

En este caso la solución es

$$(4.63) \quad \begin{aligned} \Psi_2^{(\downarrow)}(n+1, l, v) &\simeq e^{-v/2} \{ \bar{\alpha}_{nl} [\mathcal{I}_{n-1/2} [2e^{-v}] + \mathcal{I}_{n+1/2} [2e^{-v}]] \\ &+ \bar{\beta}_{nl} [\mathcal{K}_{n-1/2} [2e^{-v}] - \mathcal{K}_{n+1/2} [2e^{-v}]] \}, \end{aligned}$$

y las frecuencias cuasi-normales son

$$(4.64) \quad E_n^{(2,\downarrow)} = -i \frac{n}{2a} \quad n = 1, 2, \dots$$

Para satisfacer la expresión para las parejas supersimétricas

$$(4.65) \quad \Psi_2^{(\downarrow)}(1, l, v) = \left\{ -\frac{d}{dv} - 2l e^{-v} \right\} \Psi_1^{(\downarrow)}(0, l, v),$$

debemos pedir que $\bar{\alpha}_{nl} = 0$ en (4.63).

4.5.3. Soluciones asintóticas para grandes distancias: $r \rightarrow \infty$

Para completar nuestro enfoque estudiaremos el caso del campo gravitacional débil a grandes distancias del agujero negro. En este caso $r \rightarrow \infty$, de forma que $e^{(u-a)/a} \rightarrow e^{u/a}$. El superpotencial puede ser aproximado a

$$(4.66) \quad W^{\uparrow\downarrow}(u) \Big|_{u \rightarrow \infty} \simeq \frac{\kappa_{\uparrow\downarrow}}{a} \frac{1}{LW[e^{u/a}]},$$

y los potenciales supersimétricos tomarán la siguiente forma:

$$(4.67) \quad V_{1,2}^{\uparrow\downarrow}(u) \Big|_{u \rightarrow \infty} \frac{(\kappa_{\uparrow\downarrow})}{a^2} \frac{1}{\{LW[e^{u/a}]\}^2} [(\kappa_{\uparrow\downarrow}) \mp 1].$$

A distancias muy grandes estos potenciales tienden a cero; es por eso que las ecuaciones aproximadas de Schrödinger pueden escribirse como sigue

$$(4.68) \quad -\frac{d^2}{du^2} \psi_{1,2}^{(\uparrow\downarrow)}(u) \simeq \left[E_n^{(\uparrow\downarrow)} \right]^2 \psi_{1,2}^{(\uparrow\downarrow)}(u).$$

La solución general de estas últimas puede escribirse como una combinación lineal de $e^{\pm i E_n^{(\uparrow\downarrow)} u}$. Después de tener en cuenta las condiciones de normalización, y los signos en $E_n^{(\uparrow\downarrow)}$, obtenemos que para grandes distancias las soluciones salientes son

$$(4.69) \quad \psi_{1,2}^{(\uparrow\downarrow)}(u) \sim e^{-nu/(2a)}.$$

Esta solución esta en perfecta concordancia con la obtenida en (Cho, 2006).

4.5.4. Frecuencias cuasi-normales y temperatura de Hawking.

La temperatura de Hawking para el agujero negro de Schwarzschild (cita Hawking) es

$$(4.70) \quad T_H = \frac{1}{4\pi a},$$

tal que las frecuencias cuasi-normales pueden escribirse como

$$(4.71) \quad E_n^{(2,\uparrow\downarrow)} = E_n^{(1,\uparrow\downarrow)} = -2\pi i n T_H.$$

Este resultado es exactamente el obtenido recientemente en (Cho et al., 2007), aunque utilizando el método WKB [ver además (Andersson y Howls, 2004)].

4.6. Neutrino en un agujero negro de Schwarzschild en $d > 4$ dimensiones.

El estudio de los neutrinos en un agujero negro de Schwarzschild multidimensional es un tema de interés actual. En este caso la métrica extendida del agujero negro de Schwarzschild en $d > 4$ dimensiones está dada por

$$(4.72) \quad d\bar{s}^2 = f_{(d)}(r) dt^2 - \frac{1}{f_{(d)}(r)} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2,$$

donde d es la dimensión del espacio-tiempo, $d\Omega_{d-2}^2$ denota la métrica de una esfera $(d-2)$ -dimensional mientras que

$$(4.73) \quad f_{(d)}(r) = 1 - \left(\frac{a}{r} \right)^{(d-3)}.$$

En este caso los escalares análogos a los encontrados en (Konoplya, 2003) son

$$(4.74) \quad \kappa_{\uparrow\downarrow}^{(d)} = \begin{pmatrix} \left[l + \left(\frac{d-2}{2} \right) \right] \\ - \left[l + \left(\frac{d-4}{2} \right) \right] \end{pmatrix},$$

donde d sólo toma valores enteros para $\kappa_{\uparrow\downarrow}^{(d)}$ un entero no nulo. La coordenada tortuga se puede escribir como

$$(4.75) \quad u(r) = a \left[\frac{1}{1 - f_{(d)}(r)} \right]^{1/(d-3)} {}_2\mathcal{F}_1 \left\{ 1, \frac{1}{3-d}; \frac{d-4}{d-3}; \left[\frac{1}{1 - f_{(d)}(r)} \right]^{1/(d-3)} - 1 \right\}^{(3-d)},$$

donde ${}_2\mathcal{F}_1[\mu, \nu; \gamma; x] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu_n \mu_n x^n}{\gamma_n n!}$ es la función hipergeométrica y hemos hecho uso de

$$(4.76) \quad (a/r) = \left(\frac{1}{1 - f_{(d)}(r)} \right)^{1/(d-3)}.$$

Además, se puede aproximar el superpotencial para valores dimensionales muy grandes ($d \gg 1$)

$$(4.77) \quad W^{\uparrow\downarrow(d)}(r) \Big|_{d \rightarrow \infty} \simeq \frac{\kappa_{\uparrow\downarrow}^{(d)}}{a \left[1 + \left(\frac{u}{a} - 1 \right)^{1/(3-d)} \right]} \left[1 - \left[1 + \left(\frac{u}{a} - 1 \right)^{1/(3-d)} \right]^{(3-d)} \right]^{1/2}.$$

Un análisis detallado en el marco de supersimetría (SUSY) es demasiado complicado y va más allá del alcance de este capítulo. Sin embargo se pueden encontrar (cita) los autovalores de energía

$$(4.78) \quad E_n^{\uparrow\downarrow(d)} = -i \left(\frac{d-3}{2a} \right) n = -2\pi i T_H n,$$

tal que la temperatura de Hawking d -dimensional aumenta linealmente con el número de dimensiones extra: $T_H = (d-3)/(4\pi a)$.

4.7. Conclusión del capítulo.

Hemos usado el formalismo de Fock-Ivanenko en un espacio-tiempo curvo para obtener la ecuación de Dirac de un fermión de espín 1/2 sin masa cerca de un agujero negro de Schwarzschild. Se obtuvieron soluciones analíticas aproximadas para los espinores. Las autofunciones radiales de los espinores $\phi_l^{(\uparrow\downarrow)}$ son descritas por ecuaciones tipo Schrödinger, las que pueden ser reexpresadas en términos de la coordenada tortuga $u(r)$: $v = -(u-a)/a$. Además, hemos probado el carácter supersimétrico de los potenciales $V_1^{(\uparrow\downarrow)}$ y $V_2^{(\uparrow\downarrow)}$, que corresponden a las Hamiltonianas no hermitianas $H_1^{(\uparrow\downarrow)}$ y $H_2^{(\uparrow\downarrow)}$. Respecto de las soluciones analíticas aproximadas para los autovalores de energía (o frecuencias cuasi-normales) es importante notar que todos los estados asintóticos (y sus compañeros supersimétricos) tienen frecuencias imaginarias puras, que pueden expresarse en términos de la temperatura de Hawking T_H : $E_n^{(\uparrow\downarrow)} = -2\pi i n T_H$. El estado fundamental aislado tiene un autovalor de energía nulo, en concordancia con lo que uno esperaría de las Hamiltonianas supersimétricas (Nogami y Toyama, 1993). Así, todos los modos asintóticos, con excepción del modo estable nulo, son estados que decaen.

Capítulo 5

Ecuación de Dirac para neutrinos masivos en un espacio-tiempo de Schwarzschild-de Sitter desde un vacío en 5D

El estudio de la dispersión de ondas en el espacio-tiempo de un agujero negro es determinante para la comprensión de las señales que captarán las nuevas generaciones de detectores de ondas gravitacionales en los próximos años (Rowan y Hough, 2000). Dado que las perturbaciones lineales en los agujeros negros se representan como campos de espín entero, el estudio de la dispersión de campos está concentrado en estos casos, mientras que los campos de Dirac son menos comunes, en particular los masivos (Unruh, 1976). El neutrino no responde directamente a los campos eléctricos y magnéticos. Por lo tanto, si se desea influir en su órbita con fuerzas simples de analizar, uno tiene que hacer uso de campos gravitacionales. Dicho de otra manera, se tiene que considerar la física de un neutrino en un espacio-tiempo curvo. Existen métodos tanto numéricos como analíticos para resolver las distintas ecuaciones de onda que corresponden a la dispersión de neutrinos en un agujero negro (Futtermann et al., 2009). Otras soluciones aproximadas se pueden obtener usando métodos semi-analíticos, como WKB (Berry y Mount, 1972; Bender y Orszag, 1999), el cual ha resultado ser muy útil y preciso en la evaluación de las frecuencias de los modos cuasi-normales (Schutz y Will, 1985; Iyer y Will, 1987). Las frecuencias de los modos cuasi-normales, en el caso de neutrinos sin masa, pueden ser obtenidas usando soluciones analíticas aproximadas con SUSY (Sánchez et al., 2011b).

Por otra parte, la extensión del espacio-tiempo en 4D al caso de variedades con $N(\geq 5)D$ es el camino preferido para la unificación de las interacciones de la física de partículas con la gravedad. Los dos enfoques más actuales a la relatividad en 5D, teoría de branas y materia inducida, son matemáticamente equivalentes (Ponce de León, 2001b). La primera utiliza la métrica deformada en 5D, y en general conduce a una fuerza extra sobre una partícula masiva en 4D (Youm, 2000), donde sin embargo, la partícula puede viajar sobre una geodésica nula en 5D (Youm, 2001). Resultados similares se encontraron previamente para materia inducida, la cual usa comúnmente la métrica canónica en 5D para aislar la *quinta fuerza* (Wesson et al., 1999) y examinar las geodésicas nulas en 5D (Seahra y Wesson, 2001).

Estas investigaciones son de naturaleza clásica, pero invitan claramente a un examen del cuadro correspondiente en la teoría cuántica. En un trabajo más reciente (Wesson, 2003) se estudió la ecuación de Klein-Gordon y la ecuación de Dirac para geodésicas nulas. En este capítulo estudiaremos la ecuación de Dirac en 4D para fermiones neutros de espín 1/2 con masa (neutrinos) los cuales se encuentran cerca de un agujero negro de Schwarzschild-de Sitter (SdS) no rotante, usaremos una métrica SdS extendida, la cual es Ricci-plana y describe un vacío en

5D. Además, consideraremos que la coordenada extra tipo espacio es no compacta.

5.1. Ecuación de Dirac para neutrinos sin masa en un vacío en 5D.

Comenzaremos considerando la métrica g_{AB} Ricci-plana ($R_{AB} = 0$ y entonces el escalar de Ricci $R = 0$), dada por el elemento de línea (Madriz Aguilar y Bellini, 2009)

$$(5.1) \quad dS^2 = \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^2 \left[-c^2 f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] + d\psi^2,$$

donde $f(r) = 1 - (2G\zeta\psi_0/(rc^2))[1 + c^2 r^3/(2G\zeta\psi_0^3)]$ es una función adimensional, $\{t, r, \theta, \phi\}$ son el tiempo y las coordenadas esféricas locales usuales empleadas en relatividad general y ψ es la coordenada extra no compacta. Por otra parte, c denota la velocidad de la luz, ψ_0 es una constante arbitraria con unidades de longitud y el parámetro constante ζ tiene unidades de $(masa)(longitud)^{-1}$. Estamos interesados en un espacio-tiempo en 5D como fibrado principal y $U(1)$ su grupo estructural. El espacio-tiempo en 4D de Einstein es la base usual de este fibrado, por lo que los campos físicos no dependerán de la coordenada extra.

5.1.1. Álgebras de Clifford para espinores en 5D.

Para definir un vacío en 5D consideraremos la densidad Lagrangiana para un campo espinorial libre sin masa en 5D, mínimamente acoplado a la gravedad

$$(5.2) \quad \mathcal{L} = \frac{\hbar c}{2} [\bar{\Psi} \gamma^A (\nabla_A \Psi) - (\nabla_A \bar{\Psi}) \gamma^A \Psi] + \frac{R}{2K},$$

donde $K = \frac{8\pi G}{c^4}$ y γ^A son las matrices de Dirac, que satisfacen

$$(5.3) \quad \{\gamma^A, \gamma^B\} = 2g^{AB} \mathbb{I},$$

tal que la derivada covariante del espinor Ψ sobre la métrica (5.1) está definida de la siguiente forma:

$$(5.4) \quad \nabla_A \Psi = (\partial_A - \Gamma_A) \Psi,$$

y la conexión de espín está dada por

$$(5.5) \quad \Gamma_A = -\frac{1}{4} [\gamma^b, \gamma^c] e_b^B \nabla_A [e_{cB}].$$

Aquí, $\nabla_A [e_{cB}] = \partial_A e_{cB} - \Gamma_{AB}^D e_{cD}$ es la derivada covariante de la pñtada e_B^c , la cual introducimos para generalizar la tétrada o *vierbein* en 4D (Cho y Lin, 2005) para relacionar la métrica extendida SdS (5.1) con el espacio-tiempo de Minkowski en 5D escrito en coordenadas cartesianas¹: $dS^2 = -c^2 dt^2 + (dx^2 + dy^2 + dz^2) + d\psi^2$

$$(5.6) \quad e_B^c = \begin{pmatrix} \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) c \sqrt{f(r)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) \frac{\sin \theta \cos \phi}{\sqrt{f(r)}} & \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{f(r)}} & \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) \frac{\cos \theta}{\sqrt{f(r)}} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) r \cos \theta \cos \phi & \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) r \cos \theta \sin \phi & -\left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) r \sin \theta & 0 \\ 0 & -\left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) r \sin \theta \sin \phi & \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) r \sin \theta \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¹El símbolo ∂_A denota la derivada parcial con respecto a x^A y $\eta_{ab} = g_{AB} e_a^A e_b^B$ denota el espacio-tiempo de Minkowski en 5D expresado en coordenadas cartesianas.

Las matrices γ^a de Dirac se representan en un espacio Lorentziano y se describen por el álgebra (Groves et al., 2002; Camporesi y Higuchi, 1996) : $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}\mathbb{I}$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\mathbb{I} & 0 \\ 0 & i\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^1 \\ i\sigma^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^3 \\ i\sigma^3 & 0 \end{pmatrix},$$

tal que $\gamma^4 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, y las σ^i

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

son las matrices de Pauli. Nótese que las cinco γ^a son vectores independientes de un espacio 5D, tal que están relacionadas a través de un álgebra de Clifford y $\gamma^4 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{abcd}\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d$.

El tensor energía-impulso para neutrinos no masivos es

$$(5.7) \quad T_b^a = - \left\{ \frac{1}{4} [\bar{\Psi}, \gamma^a \nabla_b \Psi] + \frac{1}{4} [\Psi, \gamma^a \nabla_b \bar{\Psi}] \right\}.$$

Para una métrica Ricci-plana como la (5.1), el valor de expectación de este tensor debería ser cero: $\langle T_b^a \rangle = 0$. Así, en una métrica Ricci-plana debemos asumir la siguiente condición:

$$(5.8) \quad \langle 0 | [\bar{\Psi}, \gamma^a \nabla_b \Psi] | 0 \rangle = \langle 0 | [\gamma^a \nabla_b \bar{\Psi}, \Psi] | 0 \rangle.$$

5.1.2. Ecuación de Dirac para espinores en 5D.

Si utilizamos coordenadas esféricas y el hecho que $\gamma^A = e_a^A \gamma^a$, la ecuación de Dirac sobre la métrica (5.1), asume la forma

$$(5.9) \quad \gamma^0 \frac{1}{c\sqrt{f(r)}} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \gamma^r \frac{\sqrt[4]{f(r)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \sqrt[4]{f(r)} \Psi \right] - \frac{\gamma^r}{r} \left(\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \mathbb{I} \right) \Psi$$

$$+ \gamma^4 \left[\left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \psi} + \frac{2}{\psi_0} \Psi \right] = 0,$$

donde γ^r se define

$$(5.10) \quad \gamma^r = \gamma^1 \sin \theta \cos \phi + \gamma^2 \sin \theta \sin \phi + \gamma^3 \cos \theta,$$

y los operadores de momento angular en 4D son

$$(5.11) \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

tal que

$$(5.12) \quad \gamma^r \left(\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} \right) = \gamma^1 \left(-\cos \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

$$+ \gamma^2 \left(-\cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \gamma^3 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Volvemos ahora a la ecuación de Dirac en 5D (5.9). Para resolverla podemos hacer el siguiente *ansatz*: $\Psi(t, r, \theta, \phi, \psi) = \bar{\Psi}(t, r, \theta, \phi) \Upsilon(\psi)$, tal que la ecuación para $\Upsilon(\psi)$ es

$$(5.13) \quad \left[\left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) \frac{\partial \Upsilon(\psi)}{\partial \psi} + \frac{2}{\psi_0} \Upsilon(\psi) \right] = m \Upsilon(\psi),$$

siendo $m = m_0/\psi_0$ una constante de separación.

5.1.3. La masa de los neutrinos desde un vacío en 5D.

La solución de la ecuación (5.13) es

$$(5.14) \quad \Upsilon(\psi) = \Upsilon_0 \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{m_0-2},$$

donde Υ_0 es una constante de integración. Para que la función $\Upsilon(\psi)$ esté definida para todo valor de la variable ψ debemos asegurarnos que m_0 tome valores enteros no acotados: $m_0 = \dots, 2, 1, 0, -1, -2, \dots$. Esto parecería ser una forma de discretización de los valores que puede tomar m_0 . En la Figura (5.1) se representa $\Upsilon(\psi)$ para ciertos valores enteros de m_0 . Por otro lado, para $m_0 < 2$ la función $\Upsilon(\psi)$ tiende a 0 para $\psi \rightarrow \pm\infty$, pero diverge para $\psi \rightarrow 0$.

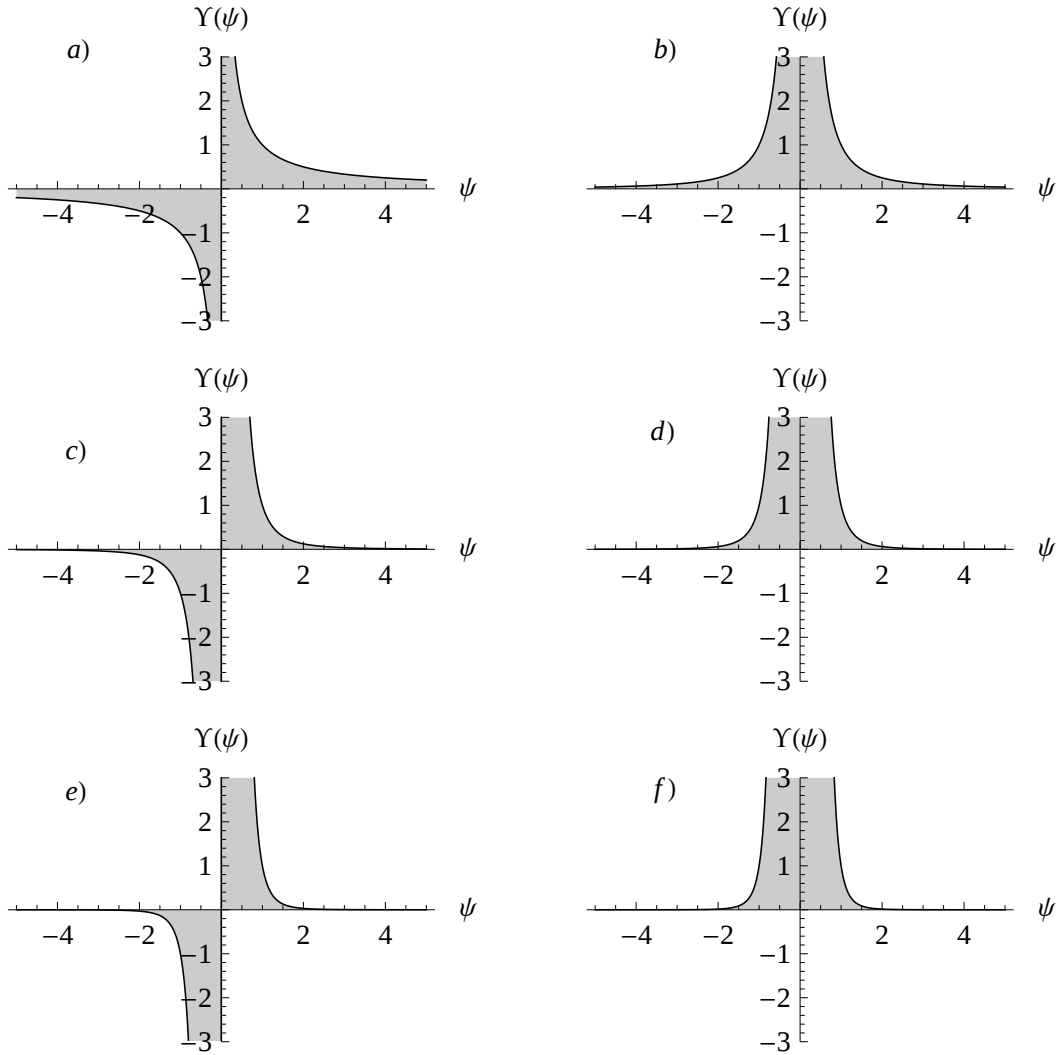


Figura 5.1: La función $\Upsilon(\psi)$ para diferentes valores de m_0 : a) $m_0 = 1$, b) $m_0 = 0$, c) $m_0 = -1$, d) $m_0 = -2$, e) $m_0 = -3$ and f) $m_0 = -4$.

Hay que tener en cuenta que para $|m_0|$ par, la función $\Upsilon(\psi)$ es par mientras que para $|m_0|$ impar la función es impar. Finalmente, uno podría distinguir entre dos diferentes casos:

- (i) Para $(\psi_0 > 0 \text{ y } m_0 \geq 0)$ o $(\psi_0 < 0 \text{ y } m_0 \leq 0)$, uno obtiene $m > 0$.
- (ii) Para $(\psi_0 > 0 \text{ y } m_0 \leq 0)$ o $(\psi_0 < 0 \text{ y } m_0 \geq 0)$, la masa es negativa: $m < 0$.

El último caso no tiene sentido en la física en 4D por lo tanto debería ser descartado.

5.2. Ecuación de Dirac inducida en 4D para neutrinos masivos en un espacio-tiempo SdS.

Ahora supongamos que el espacio-tiempo en 5D puede ser foliado por la familia de hipersuperficies $\{\Sigma_0 : \psi = \psi_0\}$. En cada hipersuperficie genérica Σ_0 la métrica inducida está dada por el elemento de línea en 4D

$$(5.15) \quad dS_{ind}^2 = -c^2 f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

el cual describe un espacio-tiempo de Schwarzschild-de Sitter con una ecuación de estado $\omega = P/(c^2 \rho) = -1$. Si suponemos una foliación estática del espacio-tiempo 5D sobre la hipersuperficie Σ_0 en 4D, el tensor energía-impulso 4D será descrito por un fluido perfecto $\bar{T}_{\alpha\beta} = e_\alpha^A e_\beta^B T_{AB} = (\rho c^2 + P) u_\alpha u_\beta - P h_{\alpha\beta}$, donde $\rho(t, r)$ and $P(t, r)$ son la densidad de energía y la presión de la materia inducida respectivamente. Además, las cuadri-velocidades u_α están relacionadas con las penta-velocidades U_A a través de $u_a = e_a^A U_A$, mientras que $h_{\alpha\beta} = e_\alpha^A e_\beta^B g_{AB}$ son las componentes del tensor métrico en (5.15). Desde el punto de vista relativista, los observadores que están sobre Σ_0 se mueven con $U^\psi = 0$. Desde el punto de vista matemático, el teorema de Campbell-Magaard (Campbell, 1926; Magaard, 1963; Rippl et al., 1995; Dahia y Romero, 2002b, 2005) sirve como vínculo entre variedades cuya dimensionalidad difiere en uno. Este teorema (ver 2.2.2), válido para cualquier número de dimensiones, nos dice que *cualquier variedad n-dimensional puede ser local e isométricamente embebida en un espacio de Einstein n+1-dimensional*, es decir que cada solución de las ecuaciones de Einstein en 4D con un tensor energía-impulso arbitrario puede ser embebido en una solución de las ecuaciones de Einstein en un vacío en 5D. Debido a esto, el tensor $\bar{T}_{\mu\nu}$ es inducido y reinterpretado en 4D como una manifestación de la geometría del embebimiento.

Las ecuaciones de Einstein en Σ_0 para la métrica (5.15), asumen la forma

$$(5.16) \quad r \frac{df}{dr} - 1 + f = -\frac{8\pi G}{c^2} r^2 \rho,$$

$$(5.17) \quad r \frac{df}{dr} - 1 + f = \frac{8\pi G}{c^4} r^2 P.$$

La ecuación de estado resultante es

$$(5.18) \quad P = -\rho c^2 = -\frac{3c^4}{8\pi G} \frac{1}{\psi_0^2},$$

válida para un vacío dominado por la constante cosmológica $\Lambda_0 = 1/\psi_0^2 > 0$, inducida a partir de la dimension espacial extra.

Si tomamos una foliación constante $\psi = \psi_0 \neq 0$ en la métrica (5.1), obtenemos la métrica (5.15). En tal caso la ecuación efectiva de Dirac en 4D está dada por

$$(5.19) \quad \gamma^0 \frac{1}{c\sqrt{f(r)}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} + \gamma^r \frac{\sqrt[4]{f(r)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \sqrt[4]{f(r)} \bar{\Psi} \right] - \frac{\gamma^r}{r} \left(\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \mathbb{I} \right) \bar{\Psi} + \gamma^4 m \bar{\Psi} = 0,$$

donde la función $\bar{\Psi} \equiv \bar{\Psi}(t, r, \theta, \phi)$ debería ser real, $m = m_0/\psi_0$ con $m_0 = 2, 1, 0, -1, -2, \dots$ y se toma $\psi_0 \neq 0$ para evitar el comportamiento divergente de $\Upsilon(\psi = \psi_0)$. Como consecuencia la masa m queda discretizada. Este es un resultado muy importante que nos muestra como la masa de los neutrinos en una métrica de fondo SdS en 4D puede inducirse a partir de espinores no masivos y libres en un vacío en 5D. Resultados numéricos a esta ecuación pueden hallarse en (Zhidenko, 2004).

5.3. Conclusión del capítulo

Se ha estudiado un formalismo para describir neutrinos masivos en 4D en la métrica de un agujero negro SdS, que proviene de una métrica SdS pentadimensional extendida que es Ricci-plana. Sobre esta última definimos un vacío y así los espinores se consideran como campos fermiónicos de prueba sin masa no interactuantes. Físicamente, la métrica de fondo empleada describe una extensión en 5D de un espacio-tiempo SdS usual en 4D.

El tensor energía-impulso $\bar{T}_{\mu\nu}$ puede ser inducido y reinterpretado en 4D como una manifestación de la geometría del embebimiento, una vez que usamos el teorema de Campbell-Magaard. Este teorema implica que cada solución de las ecuaciones de Einstein en 4D con tensor energía-impulso arbitrario puede ser embebido, al menos localmente, en una solución de las ecuaciones de Einstein en un vacío² en 5D.

²es decir, al menos Ricci-plano.

Parte III

Espinores en inflación

Esta última parte ofrece un panorama donde se exploran las aplicaciones cosmológicas de los campos fermiónicos en un contexto de materia inducida. Se busca consolidar el modelo de neutrinos masivos introducido en el capítulo previo, llevándolos a una métrica cosmológica (de Sitter) y luego se estudia un modelo de condensado de espinores con una ecuación espinorial de segundo orden que resulte en un candidato válido para un campo de energía oscura.

En el **Capítulo 6** llevaremos nuestra partícula de prueba sin masa desde un vacío pentadi-mensional al límite de una métrica cosmológica (de Sitter) en 4D, para recuperar la masa de los neutrinos obtenida en el capítulo anterior. Notablemente, las soluciones al problema de modos cuasi-normales no sólo presentan discretización en la masa, sino que la geometría del embebimiento impone además una cota a los valores positivos de dichas masas. Sólo pueden darse 2 partículas con masa no nula y una con masa cero. Nuevamente la ecuación para la coordenada extra manifiesta algún tipo de confinamiento.

El **Capítulo 7** presenta un modelo original para partículas de prueba fermiónicas sin masa en un vacío en 5D que derivan en partículas masivas en una métrica cosmológica en 4D. Del estudio de la ecuación de segundo orden para el condensado de espinores se obtienen soluciones bosónicas, una de las cuales (la de espín cero), satisface las ecuaciones de estado para un universo que se expande en forma acelerada. Dichas soluciones son manifestamente no-locales y asintóticamente invariantes de Lorentz. Se estudia una interpretación para la longitud de onda física basada en un modelo cosmológico tratado en el Capítulo 3.

Capítulo 6

Ecuación de Dirac en una métrica de de-Sitter 5D para neutrinos masivos a partir del formalismo de Materia Inducida

Intentaremos aplicar el formalismo introducido en el capítulo anterior para estudiar neutrinos masivos en una métrica de fondo de de-Sitter a partir de una métrica de de-Sitter extendida en 5D. En esta última, que resulta ser Riemann-plana (y por ende Ricci-plana), se define el vacío para los campos de prueba sin masa con espín 1/2. Estos campos están mínimamente acoplados con la gravedad y además son libres de cualquier otra interacción. Veremos que las masas efectivas 4D de los neutrinos sobre una hipersuperficie pueden tomar sólo tres valores posibles, los cuales están relacionados con la foliación estática de la dimensión extra no compacta.

En modelos basados en supergravedad (Cremmer et al., 1983), se ha indicado la existencia de ciertas partículas ligeras cuyas interacciones desaparecen a escalas cercanas a $M = \frac{M_P}{8\pi} \simeq 2,4 \times 10^{18}$ GeV. Tales partículas no tienen nada que ver con los experimentos basados en colisionadores, aunque podrían afectar el escenario estándar de la cosmología del big-bang (Weinberg, 1982; Krauss, 1983; Coughlan et al., 1983). El gravitino, el campo de gauge asociado con la supersimetría local (SUSY), es una de las partículas débilmente interactuantes en modelos de supergravedad, y se espera que la masa del gravitino sea del orden de la escala típica para la ruptura de la supersimetría. Cuando el gravitino decae en un neutrino y un s-neutrino, los neutrinos de alta energía emitidos dispersan los neutrinos del fondo y producen leptones cargados (principalmente electrones y positrones), que luego causan cascadas electromagnéticas y producen abundantes fotones blandos.

Esto hace suponer que la propagación de neutrinos debió ser muy importante durante inflación. La cosmología inflacionaria puede ser recuperada desde un vacío en 5D (Bellini, 2005; Madriz Aguilar y Bellini, 2005; Anabitarte y Bellini, 2006). La teoría inflacionaria es muy consistente con las observaciones actuales de las anisotropías en la temperatura del fondo cósmico de microondas (Smoot et al., 1992).

El modelo más popular de inflación superenfriada es inflación caótica (Linde, 1983). En este modelo la expansión del universo es producida por un único campo escalar llamado inflatón. En alguna época inicial, supuestamente a la escala de Planck, el campo escalar era más o menos homogéneo y dominaba la densidad de energía, la cual permanece casi constante durante toda la era inflacionaria.

Por otro lado inflación puede ser recuperada a partir del teorema de Campbell-Magaard, el cual sirve como puente para proyectarse entre variedades cuya dimensión difiere en uno (Campbell, 1926; Magaard, 1963; Rippl et al., 1995; Dahia y Romero, 2002b, 2005). Este teorema, el

cual es válido en cualquier número de dimensiones, implica que cada solución de las ecuaciones de Einstein en 4D con un tensor energía-impulso arbitrario puede ser embebida, al menos localmente, en una solución de las ecuaciones de Einstein en un vacío en 5D. Debido a esto, el tensor energía-impulso en 4D podría ser una manifestación reinterpretada sobre la hipersuperficie efectiva 4D de la geometría del embebimiento. Físicamente, la métrica de fondo empleada describe una extensión a 5D del espacio-tiempo usual de de-Sitter, el cual es el espacio-tiempo 4D para una expansión inflacionaria, como se ha visto en el capítulo sobre inflación en un espacio-tiempo pentadimensional.

En este capítulo estudiamos la ecuación de Dirac para neutrinos masivos en 4D que se propagan en una expansión de de-Sitter usando el formalismo de Materia Inducida (Overduin y Wesson, 1997; Wesson, 2006). En esta teoría los campos de prueba sin masa de espín 1/2 se consideran libres de interacciones y mínimamente acoplados con la gravedad por medio de una métrica Ricci-plana en 5D en la cual está definido el vacío físico. Este enfoque es apenas diferente (aunque complementario) al abordado por P.S. Wesson en (Wesson, 2011), ya que se pone énfasis en las propiedades geométricas de los campos espinoriales en 5D. Una vez hecha la foliación estática sobre la coordenada extra, estos pueden considerarse neutrinos masivos en 4D. Si bien todos los trabajos que involucran espinores en espacios curvos son de naturaleza clásica, claramente invitan a un cuidadoso exámen del cuadro correspondiente en el caso cuántico. Una de las características que derivan del formalismo de materia inducida en el caso espinorial es que la cuantización de los campos depende del gauge utilizado. Esto último puede parecer un problema, aunque existen indicios experimentales que apoyan las interpretaciones físicas en este sentido (Wesson, 1981, 2005). Si bien existen otras publicaciones dentro de esta misma línea, en todas ellas se omite el proceso de analizar una foliación específica, lo que implica el uso del teorema de Campbell-Magaard. En este capítulo se aborda este aspecto precisamente y las consecuencias cosmológicas que de ahí surgen.

6.1. Álgebras de Clifford en 5D y espinores

Consideremos la métrica de Ponce de León (Ponce de León, 1988)

$$(6.1) \quad dS^2 = \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^2 \left[dt^2 - e^{2t/\psi_0} dR^2 \right] - d\psi^2.$$

La hipersuperficie 4D que resulta de hacer la foliación $\psi = \psi_0$ describe un espacio-tiempo de de-Sitter. Desde el punto de vista relativista un observador que se mueve con penta-velocidad $U_\psi = 0$, se moverá sobre un espacio-tiempo que describe una expansión de de-Sitter con curvatura escalar ${}^{(4)}R = 12/\psi_0^2 = 12 H_0^2$, tal que el parámetro de Hubble se define por la foliación $H_0 = \psi_0^{-1}$.

Al hacer la foliación, recuperamos la métrica efectiva en 4D

$$(6.2) \quad dS^2 \rightarrow ds^2 = dt^2 - e^{2H_0 t} d\vec{R}^2,$$

que describe un universo en expansión de de-Sitter, espacialmente plano, isotrópico y homogéneo en 3D con un parámetro de Hubble H_0 constante.

Para definir un vacío en 5D, consideraremos además la Lagrangiana utilizada en el capítulo anterior para un espinor sin masa en 5D mínimamente acoplado a la gravedad. El formalismo que utilizaremos es el mismo, salvo por la elección de la péntada.

La péntada e_B^c relaciona la métrica extendida (6.1) con el espacio-tiempo de Minkowski 5D

escrito en coordenadas Cartesianas¹: $dS^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) - d\psi^2$

$$(6.3) \quad e_B^c = \begin{pmatrix} \left(\frac{\psi}{\psi_0}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\psi}{\psi_0}\right) e^{t/\psi_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\psi}{\psi_0}\right) e^{t/\psi_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\psi}{\psi_0}\right) e^{t/\psi_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices de Dirac γ^a (no curvas) son representadas en el espacio Lorentziano (hiperbólico) en vez del espacio Euclídeo, y se pueden describir usando el álgebra de Clifford (Groves et al., 2002; Camporesi y Higuchi, 1996), $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}\mathbb{I}$. Salvo por un coeficiente imaginario que las multiplica a todas, coinciden con la base utilizada en el capítulo previo.

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

tal que $\gamma^4 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, y las σ^i son las matrices de Pauli.

Esta elección responde a que vamos a resolver un problema de naturaleza cuántica, aunque el resultado se obtiene en un marco cosmológico. Los sistemas coordenados Lorentzianos y Euclídeos están relacionados a través de una transformación conocida como *rotación de Wick*, que consiste en permitir que la coordenada t de la métrica de Minkowski tome valores imaginarios, es decir $t = i\tau$. Se puede pasar así de la métrica de Minkowski $ds^2 = -(dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, a una Euclídea $ds^2 = d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, y viceversa. Ciertos problemas pueden resolverse más fácilmente en uno de los espacios y luego volver al otro haciendo la transformación inversa sobre la solución buscada. Las matrices adoptan diferentes representaciones según se esté trabajando en un espacio u otro y se pueden transformar por este método. Por ejemplo, para una signatura $(+1, -1, -1, -1)$ se puede partir de

$$(6.5) \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}$$

en el espacio Lorentziano, y llegar a

$$(6.6) \quad \gamma_E^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix},$$

en el espacio Euclídeo. Nótese que esta última verifica $\{\gamma_E^a, \gamma_E^b\} = 2\delta^{ab}\mathbb{I}$.

6.1.1. Separación de variables para la ecuación de Dirac en 5D

Finalmente, usando el hecho que $\gamma^A = e_a^A \gamma^a$, la ecuación de Dirac en la métrica (6.1) se puede escribir

$$(6.7) \quad i \gamma^A \nabla_A \Psi = 0,$$

donde usamos coordenadas Cartesianas para describir la hipersuperficie Euclídea en 3D. La ecuación de Dirac (6.7) puede ser escrita como sigue

$$(6.8) \quad i \gamma^a e_a^A \partial_A \Psi + \frac{i}{8} \gamma^a [\gamma^b, \gamma^c] e_a^A e_b^B g_{DB} (\partial_A e_c^D + \Gamma_{EA}^D e_c^E) \Psi = 0.$$

¹El símbolo ∂_A denota la derivada parcial con respecto a x^A y $\eta_{ab} = g_{AB} e_a^A e_b^B$ representa al espacio-tiempo de Minkowski en 5D en coordenadas Cartesianas.

Los símbolos de Christoffel de segundo tipo no nulos, son

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \Gamma_{04}^0 &= \frac{1}{\psi}, \quad \Gamma_{11}^0 = \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{33}^0 = \frac{e^{2\frac{t}{\psi_0}}}{\psi_0}, \quad \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{\psi_0}, \\ \Gamma_{14}^1 &= \Gamma_{24}^2 = \Gamma_{34}^3 = \frac{1}{\psi}, \quad \Gamma_{00}^4 = \frac{\psi}{\psi_0^2}, \Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = \Gamma_{33}^4 = -\frac{e^{2\frac{t}{\psi_0}}\psi}{\psi_0^2}. \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación de Dirac (6.7) en la métrica 5D Riemann-plana (6.1) resulta

$$(6.10) \quad i \left\{ \gamma^0 \left[\left(\frac{\psi_0}{\psi} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{3}{2\psi} \right] + \left(\frac{\psi_0}{\psi} \right) e^{-\frac{t}{\psi_0}} [\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}] + \gamma^4 \left[\frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{2}{\psi} \right] \right\} \Psi = 0.$$

Para llevar a cabo la separación de variables adoptaremos el método introducido por G. V. Shishkin en (Shishkin y Villalba, 1989). Después de manipular algebraicamente la ecuación (6.10) podemos escribir

$$(6.11) \quad (\hat{K}_{04} + \hat{K}_{123}) \Phi = 0,$$

donde² $\hat{K}_{04}\Phi = k\Phi = -\hat{K}_{123}\Phi$ y $\Phi = \gamma^0\gamma^4\Psi$. Los operadores de separación $\hat{K}_{04}$ y $\hat{K}_{123}$ están dados por

$$(6.12) \quad \hat{K}_{04} = \left[\gamma^0 e^{t/\psi_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{3}{2\psi_0} \right) + \frac{1}{\psi_0} \gamma^4 e^{t/\psi_0} \left(\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + 2 \right) \right] \gamma^0 \gamma^4,$$

$$(6.13) \quad \hat{K}_{123} = \left[\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} \right] \gamma^0 \gamma^4,$$

tal que debe satisfacerse el conmutador $[\hat{K}_{04}, \hat{K}_{123}] \Phi = 0$. Dado que la métrica (6.1) es 3D espacialmente isotrópica, una expansión en términos de funciones armónicas satisface la ecuación asociada al operador $\hat{K}_{123}$. De esta forma podemos escribir

$$(6.14) \quad \Phi(t, x, y, z, \psi) \sim \Phi_0(t, \psi) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}},$$

tal que $\vec{k}$ es el vector de onda para la propagación en el espacio Euclídeo 3D, homogéneo e isótropo. La parte dependiente de t y ψ se obtiene al resolver

$$(6.15) \quad \hat{K}_{04}\Phi_0(t, \psi) = k \Phi_0(t, \psi),$$

siendo $k = |\vec{k}|$.

Después de repetir el procedimiento de separación, algunos cálculos nos permiten expresar

$$(6.16) \quad (\hat{K}_0 + \hat{K}_4) \Upsilon(t, \psi) = 0,$$

tal que

$$(6.17) \quad \hat{K}_4 \Upsilon = M \Upsilon = -\hat{K}_0 \Upsilon,$$

donde hemos usado la expresión $\Upsilon(t, \psi) = (\gamma^0)^{-1} \Phi_0(t, \psi)$, y

$$(6.18) \quad \hat{K}_0 = \left[\gamma^4 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{3}{2\psi_0} \right) - \mathbb{I} k e^{-t/\psi_0} \right] \gamma^0,$$

$$(6.19) \quad \hat{K}_4 = \left[\gamma^0 \frac{1}{\psi_0} \left(\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + 2 \right) \right] \gamma^0,$$

²Los subíndices en los operadores denotan las variables que figuran explícitamente en ellos. Además, partiendo de $\hat{K}_{123}\Phi + k\Phi = 0$ y haciendo $\det(i\gamma^a k_a + k\mathbb{I}) = 0$, podemos evaluar la constante de separación: $k = |\vec{k}|$.

que cumplen con el conmutador $[\hat{K}_0, \hat{K}_4] \Upsilon = 0$. De la primera ecuación en (6.17), con la separación de variables

$$(6.20) \quad \Upsilon(t, \psi) = \Upsilon_0(t) \Lambda(\psi),$$

obtenemos la ecuación diferencial para $\Lambda(\psi)$

$$(6.21) \quad \frac{\psi}{\psi_0} \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} + \frac{2}{\psi_0} \Lambda = M \Lambda,$$

que es igual a la ecuación obtenida en el capítulo previo y en (Sánchez et al., 2011a) pero en un contexto diferente. La solución para esta ecuación es

$$(6.22) \quad \Lambda(\psi) = \Lambda_0 \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{M_0-2},$$

donde Λ_0 es una constante de integración y $M = M_0/\psi_0$ es una constante de separación de variables. Para $M_0 < 2$ la función $\Lambda(\psi)$ tiende a 0 para $\psi \rightarrow \pm\infty$, pero diverge para $\psi \rightarrow 0$. Para que la función $\Lambda(\psi)$ sea finita (excepto en el origen) y quede definida en todo el eje ψ , debemos pedir que M_0 tome valores enteros y $M_0 \leq 2$: $M_0 = 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, \dots$. Una propiedad interesante es que para el caso de $|M_0|$ par, la función $\Lambda(\psi)$ es par y para $|M_0|$ impar, la función $\Lambda(\psi)$ es además impar.

6.2. Ecuación de Dirac efectiva en 4D para neutrinos masivos en un espacio-tiempo de de-Sitter

Supondremos que al hacer una foliación estática del espacio-tiempo en 5D inducimos la hipersuperficie Σ_0 en 4D, sobre la cual el tensor energía-impulso se describe por un fluido perfecto $\bar{T}_{\alpha\beta} = e_\alpha^A e_\beta^B T_{AB} \Big|_{\psi_0} = (\rho + P)u_\alpha u_\beta - P h_{\alpha\beta}$, donde $\rho(t, \vec{r}, \psi_0)$ y $P(t, \vec{r}, \psi_0)$ son la densidad de energía y la presión de la materia inducida, respectivamente. Las 4-velocidades u_α están relacionadas con las 5-velocidades U_A por $u_a = e_a^A U_A$, y $h_{\alpha\beta} = e_\alpha^A e_\beta^B g_{AB}$ son las componentes del tensor métrico en (6.2).

Hemos visto en el capítulo (citar capítulo) que el teorema de Campbell-Magaard (válido en cualquier número de dimensiones) nos permite embeber, al menos localmente, cada solución de la ecuación de Einstein en 4D con tensor energía-impulso correspondiente en una solución de las ecuaciones de Einstein en un vacío en 5D. Debido a esto, el tensor $\bar{T}_{\mu\nu}$ es inducido como una manifestación en 4D de la geometría del embebimiento.

Si tomamos la foliación constante $\psi = \psi_0 \neq 0$ (para evitar una posible divergencia de $\Lambda(\psi = \psi_0 = 1/H_0)$) sobre la métrica (6.1) obtenemos la métrica (6.2), y la segunda ecuación en (6.17) toma la forma

$$(6.23) \quad \left[\gamma^4 \gamma^0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{3H_0}{2} \right) - \gamma^0 k e^{-H_0 t} \right] \Upsilon_0(t) = M \Upsilon_0(t),$$

donde $M = M_0/\psi_0 = M_0 H_0$ es la masa inducida de los neutrinos en el espacio-tiempo de de-Sitter (6.2). Si consideramos

$$(6.24) \quad \Upsilon_0(t) = \begin{pmatrix} \Upsilon_M^\uparrow(t) \\ \Upsilon_M^\downarrow(t) \end{pmatrix},$$

entonces $\Upsilon_M^\uparrow(t)$ y $\Upsilon_M^\downarrow(t)$ serán soluciones del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$(6.25) \quad \frac{i}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{3H_0}{2} \right) \Upsilon_M^\downarrow + (M - k e^{-H_0 t}) \Upsilon_M^\uparrow = 0,$$

$$(6.26) \quad -\frac{i}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{3H_0}{2} \right) \Upsilon_M^\uparrow + (M + k e^{-H_0 t}) \Upsilon_M^\downarrow = 0.$$

Uno puede trabajar con ambas ecuaciones, (6.25) y (6.26) y obtener las dos ecuaciones diferenciales desacopladas

$$(6.27) \quad \frac{\partial^2 \Upsilon_M^\uparrow}{\partial t^2} + \frac{H_0 (3M + 4k e^{-H_0 t})}{(M + k e^{-H_0 t})} \frac{\partial \Upsilon_M^\uparrow}{\partial t} + \left[\frac{3 H_0^2 k e^{-H_0 t}}{2 (M + k e^{-H_0 t})} + \frac{9 H_0^2}{4} - (M^2 - k^2 e^{-2H_0 t}) \right] \Upsilon_M^\uparrow = 0,$$

$$(6.28) \quad \frac{\partial^2 \Upsilon_M^\downarrow}{\partial t^2} + \frac{H_0 (3M - 4k e^{-H_0 t})}{(M - k e^{-H_0 t})} \frac{\partial \Upsilon_M^\downarrow}{\partial t} + \left[-\frac{3 H_0^2 k e^{-H_0 t}}{2 (M - k e^{-H_0 t})} + \frac{9 H_0^2}{4} - (M^2 - k^2 e^{-2H_0 t}) \right] \Upsilon_M^\downarrow = 0.$$

Las soluciones generales de (6.27) y (6.28) son³

$$(6.29) \quad \begin{aligned} \Upsilon_M^{(\uparrow, \downarrow)}(t) &= e^{\mp \frac{i}{H_0} k e^{-H_0 t}} \left\{ C_1 e^{-\left[\frac{3}{2} + \frac{M}{H_0}\right] H_0 t} \mathcal{HeunC}[\alpha i, \alpha, -2, 0, 1, \mp x(t)] \right. \\ &\quad \left. + C_2 e^{-\left[\frac{3}{2} - \frac{M}{H_0}\right] H_0 t} \mathcal{HeunC}[\alpha i, -\alpha, -2, 0, 1, \mp x(t)] \right\}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{HeunC}[\alpha i, \alpha, -2, 0, 1, \mp x(t)]$ y $\mathcal{HeunC}[\alpha i, -\alpha, -2, 0, 1, \mp x(t)]$ son las funciones confluentes de Heun con argumentos $\mp x(t) = \mp \frac{k}{M} e^{-H_0 t}$, y parámetros $(\alpha i, \mp \alpha, -2, 0, 1)$. Aquí

$$\alpha = 2 \frac{M}{H_0}.$$

Es importante notar que para tiempos grandes las funciones de Heun tienden asintóticamente a

$$(6.30) \quad \mathcal{HeunC}[\alpha i, \alpha, -2, 0, 1, \mp x(t)]|_{H_0 t \gg 1} \rightarrow 1,$$

$$(6.31) \quad \mathcal{HeunC}[\alpha i, -\alpha, -2, 0, 1, \mp x(t)]|_{H_0 t \gg 1} \rightarrow \infty.$$

Para que los espinores $\Upsilon_M^{(\uparrow, \downarrow)}$ se comporten correctamente a tiempos grandes de inflación, el argumento $\left[\frac{3}{2} + \frac{M}{H_0}\right]$ de la exponencial $e^{-\left[\frac{3}{2} + \frac{M}{H_0}\right] H_0 t}$ debe ser positivo o cero, y $C_2 = 0$. Este requerimiento sólo fija una cota inferior sobre M_0 , de forma que $-\frac{3}{2} \leq M_0 \leq 2$. Entonces, para M positivo hay tres posibles valores de masa

$$(6.32) \quad M_1 = 0, \quad M_2 = H_0, \quad M_3 = 2H_0.$$

Este resultado es muy importante. Sabemos que al final de inflación el valor del horizonte de Hubble era del orden de $(c/H_0) \simeq 10^{-5} \text{cm}$, mientras que el valor actual es $(c/\bar{H}_0) \simeq 10^{28} \text{cm}$. Por lo tanto, haciendo una extrapolación a los valores actuales del parámetro de Hubble, $\bar{H}_0 \simeq 10^{-33} H_0$, las masas actuales de los neutrinos serían

$$(6.33) \quad \bar{M}_1 = 0, \quad \bar{M}_2 = \bar{H}_0 = 10^{-12} \text{eV}, \quad \bar{M}_3 = 2\bar{H}_0 \simeq 2 \times 10^{-12} \text{eV},$$

donde hemos tomado $H_0 \simeq 10^{-9} G^{-1/2}$ como el valor del parámetro de Hubble al final de inflación. Estos últimos resultados están en concordancia con la estimación actual de las masas de los neutrinos (Gonzalez-Garcia y Nir, 2003).

³En el caso de $M = 0$, ambas soluciones $\Upsilon_{M=0}^{(\uparrow, \downarrow)}(t)$ son iguales y la solución general toma la forma

$$\Upsilon_{M=0}^{(\uparrow, \downarrow)}(t) = e^{-\frac{3}{2} H_0 t} \left\{ C_1 \sin \left[\frac{k}{H_0} e^{-H_0 t} \right] + C_2 \cos \left[\frac{k}{H_0} e^{-H_0 t} \right] \right\}.$$

Se sabe que existen tres tipos de neutrinos, los que corresponden a cada tipo de leptón (sabor): neutrino electrónico, neutrino muónico y neutrino tauónico junto con sus respectivos antineutrinos. Los neutrinos son capaces de cambiar de sabor aleatoriamente, un proceso que se denomina *oscilación de los neutrinos* (Cohen et al., 2009; An y Daya Bay Reactor Neutrino Collaboration Group, 2012; Nakamura y Particle Data Group, 2010). Dado que el proceso es al azar, las proporciones de cada sabor se reparten aproximadamente por igual (1/3 para cada familia).

El Modelo Estándar de Partículas supone que los neutrinos son no masivos, sin embargo se ha establecido experimentalmente que el fenómeno de oscilación de los neutrinos requiere que las masas sean no nulas (Valle, 2006; Fogli et al., 2012). En la oscilación, los estados de sabor de los neutrinos se mezclan con los estados de masa. Esto se puede implementar de dos formas; si la masa es generada por el mecanismo de Dirac, la partícula no tendrá otras interacciones aparte de la de Yukawa. Este caso es el del *neutrino estéril*. En el otro caso la masa es generada por el mecanismo de Majorana, el cual requiere que el neutrino y su antipartícula sean la misma partícula.

La cota superior más importante para la masa de los neutrinos proviene de la cosmología (Battye y Moss, 2014). El modelo del Big Bang predice que existe una relación fija entre el número de neutrinos y el número de fotones en el fondo cósmico de microondas. Si la energía total de los tres tipos de neutrinos superara un promedio de 50 eV por neutrino, habría suficiente masa en el universo para que éste colapse. Una restricción mucho más rigurosa proviene del análisis cuidadoso de los datos cosmológicos, como la radiación cósmica del fondo de microondas, estudios de galaxias, y el bosque Lyman-alfa de líneas espectrales. Estos indican que la suma de masas de las tres variedades de neutrinos debe ser inferior a 0,3 eV.

En realidad la masa de los neutrinos es, por lo menos, diez mil veces menor que la del electrón. Esto implica que los neutrinos viajan a velocidades muy cercanas a la de la luz. Por esta razón, en términos cosmológicos al neutrino se le considera materia caliente, o relativista. Previamente se consideró la posibilidad de que la masa de los neutrinos podía tener una contribución dentro de la materia oscura del Universo. Sin embargo, resultó que la masa del neutrino era demasiado pequeña para ser tenida en cuenta en la colosal cantidad de materia oscura que se calcula que existe en el universo. Por otra parte, los modelos de evolución cosmológica no concordaban con las observaciones al introducir materia oscura caliente. En estos modelos las estructuras se formarían de mayor a menor escala, mientras que las observaciones parecían mostrar que primero se formaron los condensados gaseosos, luego estrellas, luego protogalaxias, luego cúmulos, supercúmulos, etc. Las observaciones, así, encajaban más con un modelo de materia oscura fría. Por este motivo se consideró inicialmente la idea de que el neutrino contribuyera a la masa total del universo.

Desde el punto de vista experimental, la tarea de determinar la escala de masas del neutrino ha sido dominada por cotas inferiores provenientes de los experimentos en física de partículas, complementados por cotas superiores que provienen de la cosmología.

Finalmente, para tiempos grandes la solución (6.29) puede ser aproximada por

$$(6.34) \quad \Upsilon_M^{(\uparrow, \downarrow)}(t) \Big|_{H_0 t \gg 1} \simeq C_1 e^{\mp \frac{i}{H_0} k e^{-H_0 t}} e^{-\left[\frac{3}{2} + \frac{M}{H_0}\right] H_0 t},$$

donde el espinor puede normalizarse utilizando la técnica del vacío de Bunch-Davies.

6.3. Conclusión del capítulo

En este capítulo se estudió la ecuación de Dirac efectiva y sus soluciones para neutrinos masivos en una expansión de de-Sitter en 4D a partir de una métrica de fondo extendida en 5D. Sobre esta métrica de de-Sitter extendida en 5D (Riemann-plana) se definió un vacío para campos no masivos de espín 1/2. Dichos campos están libres de interacciones y mínimamente

acoplados con la gravedad. Después de hacer la foliación estática estos campos adquieren una masa inducida en la métrica efectiva en 4D (6.2). Sin embargo, la masa de los neutrinos puede tomar sólo tres posibles valores: $M_1 = 0$, $M_2 = H_0 = 1/\psi_0$ y $M_3 = 2H_0 = 2/\psi_0$. Nótese que dependen de ψ_0 , que es el valor tomado para foliar la coordenada extra. Desde el punto de vista físico los valores de masa dependen de la constante de Hubble durante inflación, siendo éste un parámetro en principio medible.

Al extrapolar el valor actual del parámetro de Hubble la masa más grande $\bar{M}_2$ debería tomar un valor $\sim 2 \times 10^{-12}$ eV. Este es un resultado muy fuerte que asegura que las masas efectivas de los neutrinos en 4D son inversamente proporcionales a la foliación, $\psi = \psi_0$, y muestra como la masa de los neutrinos en un espacio-tiempo de de-Sitter en 4D puede ser inducida a partir de tres espinores de prueba no masivos y libres sobre la métrica extendida en 5D. Cabe señalar que si bien la métrica extendida en 5D es Riemann-plana (y Ricci-plana) los símbolos de Christoffel de segundo tipo Γ_{BC}^A en general son no nulos.

Más importante aún es que las masas de los neutrinos cosmológicos dependen de la escala de energía del universo, puesto que dependen del parámetro de Hubble. Sin embargo este resultado debe tomarse con cuidado ya que hemos despreciado cualquier tipo de interacción del espinor con otros campos.

Capítulo 7

Energía oscura primordial desde un condensado de espinores en un vacío en 5D

Versiones más actuales de la Relatividad General en 5D han dejado de lado las condiciones de cilindridad y compactificación utilizadas en teorías tipo Kaluza-Klein que causaban problemas con la constante cosmológica y las masas de las partículas, considerando solamente una dimensión extra no compacta. El problema principal de aquellos enfoques radicaba en saber si las propiedades de la materia en cuatro dimensiones pueden verse como de origen puramente geométrico.

En particular, el formalismo de materia inducida (Wesson, 1992; Overduin y Wesson, 1997) está basado en la suposición de que la materia ordinaria y los campos físicos que observamos en nuestro universo 4D pueden ser geoméricamente inducidos a partir de una métrica Ricci-plana 5D con una dimensión espacial extra no compacta, sobre la cual definimos un vacío físico. El Teorema de Campbell-Magaard sirve como puente para moverse entre variedades cuya dimensión difiere en uno (Campbell, 1926). Se puede decir que debido a este teorema cada solución de las ecuaciones de Einstein en 4D con tensor energía-impulso arbitrario pueden ser embebidas, al menos localmente, en una solución de las ecuaciones de Einstein en 5D en un vacío relativista: $G_{AB} = 0$ ¹.

Como resultado de esto, haciendo una foliación estática sobre la coordenada espacial extra, es posible obtener un universo efectivo en 4D que sufre una expansión exponencial acelerada impulsada por un campo escalar efectivo con una ecuación de estado típicamente dominada por vacío (Feinstein, 2002; Sami, 2003; Ledesma y Bellini, 2004; Bellini, 2005):

$$P = -\rho.$$

Un problema interesante de la cosmología moderna radica en explicar el origen físico de la constante cosmológica, la cual es responsable de la expansión exponencial inflacionaria del universo temprano. La explicación estándar para la expansión primordial del universo es que es impulsada por el campo inflatón (Guth, 1981). Otra línea de investigación apunta a que dicha aceleración (así como la expansión acelerada del universo actual) podría ser impulsada por algún tipo de energía exótica llamada *energía oscura*. Los parámetros de este campo deben estar finamente sintonizados con el fin de describir la versión más adecuada de inflación y con una magnitud aceptable para las perturbaciones en la densidad (Linde, 1983). La necesidad de este campo es

¹Se considerarán letras mayúsculas $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$ en un espacio-tiempo 5D extendido de de-Sitter, mientras que las minúsculas $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$, estarán reservadas para un espacio-tiempo de Minkowsky en 5D. Como es usual en 4D, índices griegos corren como $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ e índices latinos $i, j = 1, 2, 3$. Tanto en 5D como en 4D, la parte 3D Euclidiana se toma en coordenadas cartesianas

una de las características menos satisfactorias de los modelos de inflación. Consecuentemente, creemos que vale la pena explorar variaciones de inflación en las cuales el rol del campo escalar lo cumple algún otro campo que no decaiga (o lo haga muy lentamente) durante la expansión inflacionaria (Ford, 1989; Koivisto y Mota, 2008b). De existir un campo con estas propiedades sería un candidato interesante para explicar físicamente la existencia de la constante cosmológica. Estudiaremos un modelo de la expansión de de-Sitter, debido a que describe una expansión de vacío producida enteramente por una constante cosmológica. Intentaremos describir la expansión producida por un condensado de espinores, dado que se comportan como un par de bosones (uno escalar y otro vectorial) acoplados. Esta idea ha sido seguida recientemente en un formalismo en 4D (Lee, 2012). En esta tesis se presentará una formulación alternativa que consiste en considerar los espinores sobre un vacío en 5D, para luego estudiar su dinámica sobre una hipersuperficie de-Sitter 4D. Este capítulo está basado en un trabajo previo (Sánchez y Bellini, 2013) y será extendido en esta tesis.

7.1. Lagrangiana efectiva en un espacio Riemann-plano en 5D

Estudiaremos la posibilidad de que la expansión del universo pueda ser impulsada por un condensado de espinores los cuales están libres de interacciones en el marco de un vacío relativista penta-dimensional. Dicho vacío está definido en un espacio-tiempo de de-Sitter extendido el cual es a su vez Riemann-plano. Dado que el marco teórico que empleamos es el de *materia inducida* o Space-Time-Matter la coordenada extra se considera no compacta. Después de hacer una foliación estática sobre la coordenada extra obtendremos una métrica efectiva inflacionaria en 4D que describe una expansión de de-Sitter. Mostraremos que el condensado de espinores estudiado podría ser un candidato para explicar la presencia de energía oscura en el universo primordial. Un resultado interesante y a la vez sorprendente es que la energía de dicho condensado está ingresando continuamente en el horizonte causal del universo acompañando la expansión del mismo. Este último punto podría ser determinante en la aceleración que sufre la expansión de nuestro universo (ver sección 3.2.2.2).

Estamos interesados en un espacio-tiempo Riemann-plano en 5 dimensiones con un elemento de línea

$$(7.1) \quad dS^2 = \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^2 \left[dt^2 - e^{\frac{2t}{\psi_0}} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \right] - d\psi^2,$$

donde t, x, y, z son las coordenadas locales usuales y ψ es la dimensión espacial extra no compacta. Si hacemos la foliación constante $\psi = \psi_0$, la hipersuperficie resultante en 4 dimensiones describirá un espacio-tiempo de de-Sitter. Un observador relativista con una penta-velocidad $U^4 \equiv \frac{d\psi}{dS} = 0$, se moverá en un espacio-tiempo equivalente a una expansión de de-Sitter, tal que el parámetro de Hubble estará definido por la foliación $H_0 = \frac{1}{\psi_0}$.

Después de hacer la foliación, recuperamos la métrica efectiva en 4 dimensiones

$$(7.2) \quad dS^2 \rightarrow ds^2 = dt^2 - e^{2H_0 t} dr^2,$$

la cual describe un espacio tridimensional plano, homogéneo e isótropo que se expande en un universo con parámetro de Hubble H_0 .

Desde el punto de vista físico consideraremos la acción $\mathcal{S} = \int d^5x \left[\frac{\mathcal{R}}{16\pi G} + \mathcal{L}_{eff} \right]$, donde la densidad Lagrangiana efectiva en 5D para un condensado de campos espinoriales libres es

$$(7.3) \quad \mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{2}(\nabla_A \bar{\Psi})(\nabla^A \Psi).$$

Si $\mathcal{R}$ es la curvatura escalar asociada a (7.1) y g_{AB} las componentes del tensor métrico, aplicando el principio variacional con respecto a g_{AB} se pueden obtener fácilmente las ecuaciones de movimiento. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos Ψ y $\bar{\Psi}$ surgen al hacer las siguientes

derivadas funcionales:

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathcal{L}_{eff}}{\delta \bar{\Psi}} &= 0, \\ \nabla_A \frac{\delta \mathcal{L}_{eff}}{\delta (\nabla_A \bar{\Psi})} &= -\frac{1}{2} \nabla_A \nabla^A \Psi, \\ \frac{\delta \mathcal{L}_{eff}}{\delta g_{MN}} &= \frac{1}{2} \nabla^M \bar{\Psi} \nabla^N \Psi + \frac{1}{2} \nabla_P J^{MNP},\end{aligned}$$

donde la corriente efectiva J^{MNP} es simétrica con respecto a la permutación de M y N

$$(7.4) \quad J^{MNP} = \frac{1}{8} (\nabla^M \bar{\Psi} f^{NP} \Psi + \bar{\Psi} \nabla^M \Psi),$$

y $f^{NP} = [\gamma^N, \gamma^P]$ es antisimétrica (Böhmer et al., 2010). En este punto estamos en condiciones de introducir el tensor energía-impulso $T^{MN} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}_{eff}}{\delta g_{MN}} - g^{MN} \mathcal{L}_{eff}$

$$(7.5) \quad T^{MN} = \nabla^M \bar{\Psi} \nabla^N \Psi + \nabla_P J^{MNP} + \frac{1}{2} g^{MN} (g_{AB} \nabla^A \bar{\Psi} \nabla^B \Psi).$$

Aplicando la condición de compatibilidad de la métrica $\nabla_C g^{AB} = 0$, se obtiene

$$(7.6) \quad \nabla_A \nabla^A \Psi = \nabla_A (g^{AB} \nabla_B \Psi) = (\nabla_A g^{AB}) \nabla_B \Psi + g^{AB} \nabla_A \nabla_B \Psi = 0,$$

y la ecuación para el espinor Ψ toma la forma:

$$(7.7) \quad g^{AB} \nabla_A \nabla_B \Psi = 0.$$

El mismo procedimiento se puede usar para obtener la ecuación para el campo $\bar{\Psi}$.

Por otro lado, de las ecuaciones de Einstein en 5D para la métrica Riemann-plana sabemos que:

$$(7.8) \quad \langle 0 | T_{AB} | 0 \rangle = 0,$$

donde $\langle 0 | T_{AB} | 0 \rangle$ denota el valor de espectación de T_{AB} en el estado de vacío $|0\rangle$. Sobre este último punto volveremos más adelante.

7.2. Formulación tensorial de la ecuación de movimiento

Usando el formalismo previamente introducido, la doble Nabla aplicada a un espinor se puede expresar explícitamente

$$\begin{aligned}\nabla_A \nabla_B \Psi &= \partial_A \nabla_B \Psi + \Gamma_A \nabla_B \Psi - \omega_{AB}^C \nabla_C \Psi \\ &= \partial_A \partial_B \Psi - \frac{1}{4} \partial_A \omega_B^{ab} \gamma_a \gamma_b \Psi - \frac{1}{4} \omega_B^{ab} \gamma_a \gamma_b \partial_A \Psi - \frac{1}{4} \omega_A^{ab} \gamma_a \gamma_b \partial_B \Psi \\ &\quad + \frac{1}{16} \omega_A^{ab} \omega_B^{cd} \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \Psi - \omega_{AB}^C \partial_C \Psi + \frac{1}{4} \omega_{AB}^C \omega_C^{ab} \gamma_a \gamma_b \Psi.\end{aligned}\quad (7.9)$$

donde la conexión de espín es $\omega_M^{ab} = -e_N^a [\partial_M e_A^b g^{AN} + e_B^b g^{AB} \Gamma_{AM}^N]$ y $\Gamma_M = -\frac{1}{4} \omega_M^{ab} [\gamma_a, \gamma_b]$ ². Así, después de reemplazar la última expresión en la ecuación de movimiento (7.7) obtenemos:

$$\begin{aligned}&g^{AB} \partial_A \partial_B \Psi - \frac{1}{2} g^{AB} \omega_{(A}^{ab} \sigma_{ab} \partial_{B)} \Psi - g^{AB} \omega_{AB}^C \partial_C \Psi + \frac{1}{4} g^{AB} \partial_A \omega_B^{ab} \sigma_{ab} \Psi + \\ &\quad + \frac{1}{16} g^{AB} \omega_A^{ab} \omega_B^{cd} \sigma_{ab} \sigma_{cd} \Psi - \frac{1}{4} g^{AB} \omega_{AB}^C \omega_C^{ab} \sigma_{ab} \Psi = 0.\end{aligned}\quad (7.10)$$

²Los tensores pueden escribirse usando la pñtada e_a^A y su inversa e^a_A , de la siguiente forma $e_a^A e^b_A = \delta_a^b$, tal que

$$\eta_{ab} = e_a^A e_b^B g_{AB},$$

donde η_{ab} es el tensor métrico de Minkowsky en 5D con signatura $(+, -, -, -, -)$.

Aquí hemos usado $\gamma_a \gamma_b = \frac{1}{2} \{\gamma_a, \gamma_b\} + \frac{1}{2} [\gamma_a, \gamma_b] = g_{ab} \mathbb{I} + \sigma_{ab}$, la antisimetría de $\omega_M^{ab} = -\omega_M^{ba}$ y el resultado $\omega_M^{ab} \gamma_a \gamma_b = \omega_M^{ab} \sigma_{ab}$.

Si utilizamos las expresiones

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g^{AB} \omega_{(A}^{ab} \sigma_{ab} \partial_{B)} \Psi &= \frac{1}{2} g^{AB} \omega_A^{ab} \sigma_{ab} \partial_B \Psi, \\ \omega_{AB}^C &= \omega_A^{dc} g_{DB} e_d^A e_c^C, \\ g^{AB} \omega_{AB}^C &= \omega_A^{dc} e_d^A e_c^C, \end{aligned}$$

entonces la ecuación de movimiento para Ψ asume su forma final

$$(7.11) \quad \begin{aligned} &g^{AB} \partial_A \partial_B \Psi - \frac{1}{2} g^{AB} \omega_A^{ab} \sigma_{ab} \partial_B \Psi - \omega_A^{ab} e_a^A e_b^C \partial_C \Psi + \frac{1}{4} g^{AB} \partial_A \omega_B^{ab} \sigma_{ab} \Psi \\ &+ \frac{1}{16} g^{AB} \omega_A^{ab} \omega_B^{cd} \sigma_{ab} \sigma_{cd} \Psi - \frac{1}{4} \omega_A^{ab} e_a^A e_b^C \omega_C^{cd} \sigma_{cd} \Psi = 0. \end{aligned}$$

Expresada en componentes del espinor, esta ecuación se desdobla en cuatro ecuaciones diferenciales parciales acopladas³. El conjunto de ecuaciones resultante es intratable, por lo que intentaremos redefinir los campos con la idea de encontrar una dinámica que minimice el acoplamiento de los campos.

7.3. Solución basada en un mapeo conforme

Proponemos la siguiente transformación sobre las componentes del espinor

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\psi_0}{\psi}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} &- \left(\frac{\psi_0}{\psi}\right)^2 e^{-\frac{2t}{\psi_0}} \nabla^2 \Psi_1 - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \psi^2} + \frac{3\psi_0}{\psi^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - i \frac{\psi_0}{\psi^2} e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{4}{\psi} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \psi} + \frac{1}{4\psi^2} \Psi_1 = \\ &= \frac{\psi_0}{\psi^2} \left(i e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} + e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} - i \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} - e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} - i \frac{15}{2\psi_0} \Psi_3 - e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_4}{\partial x} + i e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\psi_0}{\psi}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} &- \left(\frac{\psi_0}{\psi}\right)^2 e^{-\frac{2t}{\psi_0}} \nabla^2 \Psi_2 - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \psi^2} + \frac{3\psi_0}{\psi^2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + i \frac{\psi_0}{\psi^2} e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} - \frac{4}{\psi} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \psi} + \frac{1}{4\psi^2} \Psi_2 = \\ &= \frac{\psi_0}{\psi^2} \left(-e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} - i e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} - i \frac{\partial \Psi_4}{\partial t} + e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} - i \frac{15}{2\psi_0} \Psi_4 + i e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\psi_0}{\psi}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial t^2} &- \left(\frac{\psi_0}{\psi}\right)^2 e^{-\frac{2t}{\psi_0}} \nabla^2 \Psi_3 - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial \psi^2} + \frac{3\psi_0}{\psi^2} \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} + i \frac{\psi_0}{\psi^2} e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} - \frac{4}{\psi} \frac{\partial \Psi_3}{\partial \psi} + \frac{1}{4\psi^2} \Psi_3 = \\ &= \frac{\psi_0}{\psi^2} \left(-i e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_4}{\partial x} - e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + i \frac{15}{2\psi_0} \Psi_1 - e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} + i e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\psi_0}{\psi}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi_4}{\partial t^2} &- \left(\frac{\psi_0}{\psi}\right)^2 e^{-\frac{2t}{\psi_0}} \nabla^2 \Psi_4 - \frac{\partial^2 \Psi_4}{\partial \psi^2} + \frac{3\psi_0}{\psi^2} \frac{\partial \Psi_4}{\partial t} + i \frac{\psi_0}{\psi^2} e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} - \frac{4}{\psi} \frac{\partial \Psi_4}{\partial \psi} + \frac{1}{4\psi^2} \Psi_4 = \\ &= \frac{\psi_0}{\psi^2} \left(-e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - i e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} + i \frac{15}{2\psi_0} \Psi_2 - i e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + e^{-\frac{t}{\psi_0}} \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento para las componentes redefinidas de los campos φ_1 y φ_2 adoptan la forma⁴

$$(7.12) \quad \begin{aligned} \widehat{\partial}\varphi_1 + \frac{3\psi_0}{\psi^2} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \frac{4}{\psi} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\psi} + \frac{1}{4\psi^2}\varphi_1 - \frac{i\psi_0}{\psi^2} e^{-\frac{t}{\psi_0}} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\varphi_1 = \\ = -\frac{i\psi_0}{\psi^2} \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \frac{3i}{2\psi^2}\varphi_2 - \frac{\psi_0}{\psi^2} e^{-\frac{t}{\psi_0}} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\varphi_2 \end{aligned}$$

$$(7.13) \quad \begin{aligned} \widehat{\partial}\varphi_2 + \frac{3\psi_0}{\psi^2} \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} - \frac{4}{\psi} \frac{\partial\varphi_2}{\partial\psi} + \frac{1}{4\psi^2}\varphi_2 + \frac{i\psi_0}{\psi^2} e^{-\frac{t}{\psi_0}} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\varphi_2 = \\ = \frac{i\psi_0}{\psi^2} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \frac{3i}{2\psi^2}\varphi_1 - \frac{\psi_0}{\psi^2} e^{-\frac{t}{\psi_0}} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\varphi_1 \end{aligned}$$

La estructura de estas ecuaciones se puede simplificar aún más si usamos un mapeo conforme, definiendo dos nuevos campos complejos $\Phi_+ = \varphi_1 + i\varphi_2$ y $\Phi_- = \varphi_1 - i\varphi_2$. Reescribiendo las ecuaciones (7.12) y (7.13) en términos de los nuevos campos, conseguimos desacoplar la primera ecuación que resulta así homogénea; por otra parte en la segunda ecuación, que resulta inhomogénea, el acoplamiento es un término fuente que depende solamente del campo Φ_+ .

$$(7.14) \quad \widehat{\partial}\Phi_+ + \frac{4\psi_0}{\psi^2} \frac{\partial\Phi_+}{\partial t} - \frac{4}{\psi} \frac{\partial\Phi_+}{\partial\psi} - \frac{5}{4\psi^2}\Phi_+ = 0,$$

$$(7.15) \quad \widehat{\partial}\Phi_- + \frac{2\psi_0}{\psi^2} \frac{\partial\Phi_-}{\partial t} - \frac{4}{\psi} \frac{\partial\Phi_-}{\partial\psi} + \frac{7}{4\psi^2}\Phi_- = \frac{i2\psi_0}{\psi^2} e^{-\frac{t}{\psi_0}} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\Phi_+.$$

Después de unos pocos cálculos podemos escribir la densidad Lagrangiana en los nuevos campos

$$(7.16) \quad \mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{2} (\nabla_A \bar{\varphi}_1 \nabla^A \varphi_1 + \nabla_A \bar{\varphi}_2 \nabla^A \varphi_2),$$

o, alternativamente, puede escribirse como función del par Φ_+, Φ_- con $\varphi_1 = \frac{1}{2}(\Phi_+ + \Phi_-)$, $\varphi_2 = \frac{1}{2i}(\Phi_+ - \Phi_-)$:

$$(7.17) \quad \mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} (\nabla_A \bar{\Phi}_+ \nabla^A \Phi_+ + \nabla_A \bar{\Phi}_- \nabla^A \Phi_-).$$

Vemos que estos campos efectivos, que provienen de estados con espín $\pm 1/2$, tendrán espín 0 o ± 1 . Es decir, obtenemos un campo escalar y otro vectorial. De las ecuaciones (7.14) y (7.15) podemos inferir que la ecuación para Φ_+ describe un campo escalar isotrópico, mientras que la ecuación para Φ_- describe un campo vectorial, cuyo acoplamiento con Φ_+ introduce anisotropía.

Como sabemos Φ_+ es un espinor de dos componentes, las cuales satisfacen la misma ecuación de movimiento (7.14); como es usual en lenguaje espinorial, la degeneración de las componentes convierte a dicho espinor en un campo escalar.

El campo Φ_- tiene una mezcla de componentes que proviene del acoplamiento con Φ_+ en la ecuación (7.15). Este espinor de dos componentes finalmente puede reexpresarse como las tres componentes de un campo vectorial en E_3 (ver Capítulo 1 en (Hladik, 1999)). Como dijimos, en este trabajo sólo nos interesan las aplicaciones físicas del campo Φ_+ .

⁴En lo que sigue adoptaremos las siguientes convenciones [$\vec{\sigma}$ denota el vector de Pauli, cuyas componentes son las matrices de Pauli]:

$$\begin{aligned} \widehat{\partial}\varphi &= \left(\frac{\psi_0}{\psi}\right)^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \left(\frac{\psi_0}{\psi}\right)^2 e^{-\frac{2t}{\psi_0}} \nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}, \\ \vec{\sigma} &= \sigma_1 \hat{i} + \sigma_2 \hat{j} + \sigma_3 \hat{k}, \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\varphi &= \sigma_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \sigma_3 \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{aligned}$$

La Lagrangiana efectiva y el tensor energía-impulso provienen de un vacío en 5D y están directamente relacionados con observables cosmológicos, los cuales queremos evaluar pero en 4D. Los observables a los que nos referimos son la densidad de energía y la presión, y se obtienen de la parte diagonal del tensor energía-impulso. Aplicando la foliación constante podemos recuperar estos mismos observables en 4D pero ya no en un vacío. Veremos que los términos de T_{AB} que provienen de derivadas respecto de la coordenada extra deberán ser interpretados como fuentes dinámicas (o potenciales) sobre una hipersuperficie 4D. Cuando estos potenciales efectivos sean proporcionales a la norma cuadrática de los campos, la constante de proporcionalidad podrá ser interpretada como la masa cuadrática de los mismos sobre la hipersuperficie 4D.

7.3.1. Solución asintótica en 4D a partir de la solución 5D del campo Φ_+

Para resolver la ecuación diferencial parcial (7.14) usaremos el método de separación de variables. Planteando una solución del tipo $\Phi_+(t, \vec{r}, \psi) \sim T_\kappa^{(+)}(t) R(\vec{r}) \Lambda^{(+)}(\psi)$ obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(7.18) \quad \frac{\partial^2 T_\kappa^{(+)}}{\partial t^2} + \frac{4}{\psi_0} \frac{\partial T_\kappa^{(+)}}{\partial t} + \left(\kappa^2 e^{-\frac{2t}{\psi_0}} - M_1^2 \right) T_\kappa^{(+)} = 0,$$

$$(7.19) \quad \nabla^2 R + \kappa^2 R = 0,$$

$$(7.20) \quad \frac{\partial^2 \Lambda^{(+)}}{\partial \psi^2} + \frac{4}{\psi} \frac{\partial \Lambda^{(+)}}{\partial \psi} + \left(\frac{\psi_0}{\psi} \right)^2 \left(\frac{5}{4\psi_0^2} - M_1^2 \right) \Lambda^{(+)} = 0.$$

donde $\kappa = |\vec{k}|$ y M_1 son las constantes de separación. La ecuación (7.19) tiene una solución que puede escribirse en términos de un frente de onda plano

$$R(\vec{r}) = e^{\pm i \vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

La ecuación (7.20) tiene solución general

$$\Lambda^{(+)}(\psi) = C_1 \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-\frac{3}{2} - \sqrt{1 + M_1^2 \psi_0^2}} + C_2 \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-\frac{3}{2} + \sqrt{1 + M_1^2 \psi_0^2}}.$$

Dado que estamos interesados en soluciones estáticas localizadas, o sea aquellas que decaen a cero cuando ψ tiende a infinito, debemos hacer $C_2 = 0$. De esta forma resulta que $n \equiv \frac{3}{2} + \sqrt{1 + M_1^2 \psi_0^2}$ con $n \in \mathbb{R}^+$. Con esta elección, para que la masa $M_1^2 = \frac{(n - \frac{3}{2})^2 - 1}{\psi_0^2} \geq 0$ se debe tomar $n \geq \frac{5}{2}$.

La solución para los modos dependientes del tiempo del campo Φ_+ , ecuación (7.18), puede expandirse en términos de funciones de Hankel de primer y segunda especie,

$$(7.21) \quad T_\kappa^{(+)}(t) = e^{-2H_0 t} \left[C_3 \mathcal{H}_\nu^{(1)}\left(\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t}\right) + C_4 \mathcal{H}_\nu^{(2)}\left(\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t}\right) \right],$$

donde $\nu = \sqrt{4 + M_1^2 \psi_0^2} \geq 2$. Con la normalización de los modos podremos evaluar las constantes C_3 y C_4 . Para ello aplicamos la técnica del *vacío de Bunch-Davies* (Bunch y Davies, 1978), que consiste en calcular el conmutador del campo generalizado con su impulso canónico⁵

$$(7.22) \quad \left[\Phi_+(t, \vec{r}, H_0^{-1}), \dot{\Phi}_+(t, \vec{r}', H_0^{-1}) \right] = i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'),$$

donde

$$\Phi_+(t, \vec{r}, H_0^{-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty d^3 \kappa \left[a_\kappa \Phi_{+, \kappa}(t, \vec{r}, H_0^{-1}) + a_\kappa^\dagger \Phi_{+, \kappa}^*(t, \vec{r}, H_0^{-1}) \right],$$

⁵Por simplicidad en la notación hemos omitido los brakets para el vacío que encierran al conmutador, $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$

tal que los modos vienen dados por

$$\begin{aligned}\Phi_{+,\kappa}(t, \vec{r}, H_0^{-1}) &= e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} T_{\kappa}^{(+)}(t), \\ \Phi_{+,\kappa}^*(t, \vec{r}, H_0^{-1}) &= e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} (T_{\kappa}^{(+)})^*(t).\end{aligned}$$

Además, $a_{\kappa}, a_{\kappa}^{\dagger}$ son los operadores de aniquilación y de creación del campo bosónico efectivo. Estos últimos cumplen, $[a_{\kappa}, a_{\kappa'}^{\dagger}] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$ y $[a_{\kappa}, a_{\kappa'}] = [a_{\kappa}^{\dagger}, a_{\kappa'}^{\dagger}] = 0$. En este paso no se evaluará la constante asociada al modo dependiente de ψ . La constante C_1 se agrega a la solución cosmológica al concluir la normalización y posteriormente se obtiene su valor por medio de una ecuación de estado, la que permite fijar las amplitudes relativas de los campos Φ_+ y Φ_- a nivel cosmológico.

Evaluando el conmutador (7.22) y teniendo en cuenta las expresiones asintóticas de la solución (7.21) para los modos temporales en el límite ultravioleta $[\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t} \gg 1]$, obtenemos

$$e^{4H_0 t} \{T_{\kappa}^{(+)}(\dot{T}_{\kappa}^{(+)})^* - (T_{\kappa}^{(+)})^* \dot{T}_{\kappa}^{(+)}\} = i,$$

con

$$\begin{aligned}T_{\kappa}^{(+)}(t) &\sim \sqrt{\frac{2H_0}{\pi\kappa}} e^{-\frac{3H_0}{2}t} \left\{ C_3 e^{i[\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t} - (\nu+1)\frac{\pi}{2}]} + C_4 e^{-i[\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t} - (\nu+1)\frac{\pi}{2}]} \right\}, \\ (T_{\kappa}^{(+)})^*(t) &\sim \sqrt{\frac{2H_0}{\pi\kappa}} e^{-\frac{3H_0}{2}t} \left\{ C_3 e^{-i[\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t} - (\nu+1)\frac{\pi}{2}]} + C_4 e^{i[\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t} - (\nu+1)\frac{\pi}{2}]} \right\}.\end{aligned}$$

A partir de aquí el procedimiento a seguir es estándar. Se toma la condición en el límite ultravioleta y al mismo tiempo $C_3 = 0$ obteniendo así una solución estable (oscilatoria), compatible con un estado primordial del campo. La constante $C_4 = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{H_0}}$ representa una amplitud inicial para la solución general que toma la forma

$$(7.23) \quad T_{\kappa}^{(+)}(t) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{H_0}} e^{-2H_0 t} \mathcal{H}_{\nu}^{(2)}\left(\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t}\right).$$

Puesto que estamos interesados en describir el universo en escalas cosmológicas super-Hubble, requerimos además $\frac{\kappa}{H_0} e^{-\frac{t}{\psi_0}} \ll 1$. Estas soluciones corresponden al límite infrarrojo y son inestables (crecen exponencialmente). El comportamiento asintótico de la función de Hankel en dichas escalas es

$$(7.24) \quad T_{\kappa}^{(+)}(t) \simeq \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi H_0}} e^{-2H_0 t} \left(\frac{\kappa}{2H_0} e^{-H_0 t} \right)^{-\nu}.$$

Finalmente, el espinor Φ_+ (al igual que su complejo conjugado) se puede expandir en función de los modos

$$(7.25) \quad \Phi_{+,\kappa}(t, \vec{r}, \psi) \simeq C_1 \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi}} H_0^{\nu-\frac{1}{2}} \kappa^{-\nu} e^{(\nu-2)H_0 t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-n},$$

con solución asintótica en 4D

$$(7.26) \quad \Phi_{+,\kappa}(t, \vec{r}, H_0^{-1}) \simeq C_1 \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi}} H_0^{\nu-\frac{1}{2}} \kappa^{-\nu} e^{(\nu-2)H_0 t + i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

7.3.2. Solución asintótica en 4D a partir de la solución 5D del campo Φ_-

Ahora estamos en condiciones de obtener la solución de la ecuación (7.15), válida en escala cosmológica para el campo Φ_- . Para ello tenemos que calcular el término inhomogéneo del miembro derecho de dicha ecuación utilizando el regimen asintótico de los modos $\Phi_{+,\kappa}$.

$$\frac{2i\psi_0}{\psi^2} e^{-\frac{t}{\psi_0}} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \Phi_{+,\kappa} \simeq -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi} \kappa^{\nu-1} \psi_0^{\frac{1}{2}+\nu}} e^{\frac{(\nu-3)}{\psi_0} t + i \vec{k} \cdot \vec{r}} \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-[\frac{7}{2} + \sqrt{\nu^2-3}]}.$$

Si usamos esta última expresión en (7.15) obtenemos una ecuación diferencial parcial inhomogénea para los modos $\Phi_{-,\kappa}$ del campo Φ_- ⁶.

$$(7.27) \quad \widehat{\mathcal{O}} \Phi_{-,\kappa} + \frac{2\psi_0}{\psi^2} \frac{\partial \Phi_{-,\kappa}}{\partial t} - \frac{4}{\psi} \frac{\partial \Phi_{-,\kappa}}{\partial \psi} + \frac{7}{4\psi^2} \Phi_{-,\kappa} \simeq -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi} \kappa^{\nu-1} \psi_0^{\frac{1}{2}+\nu}} e^{\frac{(\nu-3)}{\psi_0} t + i \vec{k} \cdot \vec{r}} \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-[\frac{7}{2} + \sqrt{\nu^2-3}]}.$$

Multiplicando por $\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^2$ y luego escribiendo $\Phi_{-,\kappa}(t, \vec{r}, \psi) = G_\kappa^{(-)}(t, \psi) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}$ nos queda una ecuación inhomogénea en derivadas parciales en las variables t y ψ ,

$$(7.28) \quad \frac{\partial^2 G_\kappa^{(-)}}{\partial t^2} + \frac{2}{\psi_0} \frac{\partial G_\kappa^{(-)}}{\partial t} + \left(\kappa^2 e^{-\frac{2t}{\psi_0}} + \frac{7}{4\psi_0^2} \right) G_\kappa - \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^2 \frac{\partial^2 G_\kappa^{(-)}}{\partial \psi^2} - \frac{4\psi}{\psi_0^2} \frac{\partial G_\kappa^{(-)}}{\partial \psi} \simeq -\frac{2^\nu \Gamma(\nu) \kappa^{1-\nu}}{\sqrt{\pi} \psi_0^{\frac{1}{2}+\nu}} e^{\frac{\nu-3}{\psi_0} t} \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-[\frac{3}{2} + \sqrt{\nu^2-3}]}.$$

Esta ecuación puede ser convertida en una con acoplamiento constante. Para hacer constante el miembro derecho de (7.28) proponemos la siguiente transformación:

$$G_\kappa^{(-)}(t, \psi) = \psi_0^{-2} e^{\frac{\nu-3}{\psi_0} t} \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-(\frac{3}{2} + \sqrt{\nu^2-3})} K_\kappa^{(-)}(t, \psi).$$

Finalmente debemos resolver

$$(7.29) \quad \frac{\partial^2 K_\kappa^{(-)}}{\partial t^2} + \frac{2(\nu-2)}{\psi_0} \frac{\partial K_\kappa^{(-)}}{\partial t} - \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^2 \frac{\partial K_\kappa^{(-)}}{\partial \psi^2} - 2 \frac{(\frac{1}{2} - \sqrt{\nu^2-3})}{\psi_0^2} \psi \frac{\partial K_\kappa^{(-)}}{\partial \psi} + \left(\kappa^2 e^{-2t/\psi_0} + \frac{10-4\nu}{\psi_0^2} \right) K_\kappa^{(-)} \simeq -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi} \kappa^{\nu-1} \psi_0^{-\frac{3}{2}+\nu}}.$$

La solución a esta ecuación se puede escribir como la solución a la ecuación homogénea más una solución particular. Hallaremos primero su solución particular utilizando el *ansatz* $K_{part}^{(-)}(t, \psi) = \mathcal{M} + T(t)X(\psi)$, donde $\mathcal{M}$ es una constante a determinar. Sustituyendo en la ecuación (7.29) obtenemos la siguiente relación:

$$\left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + 2 \frac{(\nu-2)}{\psi_0} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\kappa^2 e^{-\frac{2t}{\psi_0}} + \frac{10-4\nu}{\psi_0^2} \right) T(t) \right\} X(\psi) + \kappa^2 e^{-\frac{2t}{\psi_0}} \mathcal{M} + \frac{(10-4\nu)}{\psi_0^2} \mathcal{M} - T(t) \underbrace{\left\{ \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^2 \frac{\partial^2 X}{\partial \psi^2} + 2 \frac{(\frac{1}{2} - \sqrt{\nu^2-3})}{\psi_0^2} \psi \frac{\partial X}{\partial \psi} \right\}}_{=0} \simeq -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi} \kappa^{\nu-1} \psi_0^{\nu-\frac{3}{2}}}.$$

⁶De aquí en adelante nos ocupamos de las soluciones asintóticas, es decir, sólo el límite infrarrojo tiene significado cosmológico.

Se desea que el segundo término entre llaves se cancele y, simultáneamente, pedimos que la constante verifique, $\frac{(10-4\nu)}{\psi_0^2} \mathcal{M} = -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi} \kappa^{\nu-1} \psi_0^{\nu-\frac{3}{2}}}$. A su vez podemos ignorar el término que decae exponencialmente pues estamos interesados en el comportamiento a tiempos grandes. Con esto en mente debemos resolver dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(7.30) \quad \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^2 \frac{\partial^2 X}{\partial \psi^2} + 2 \frac{(\frac{1}{2} - \sqrt{\nu^2 - 3})}{\psi_0^2} \psi \frac{\partial X}{\partial \psi} = 0,$$

$$(7.31) \quad \frac{\partial^2 T_\kappa}{\partial t^2} + 2 \frac{(\nu - 2)}{\psi_0} \frac{\partial T_\kappa}{\partial t} + \left(\kappa^2 e^{-\frac{2t}{\psi_0}} + \frac{10 - 4\nu}{\psi_0^2} \right) T_\kappa(t) = 0.$$

La primera tiene solución simple por métodos tradicionales

$$X(\psi) = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{2\sqrt{\nu^2 - 3}} \right].$$

La segunda puede reducirse a una ecuación de Bessel, entonces la solución particular tiene parte temporal

$$T_\kappa(t) = e^{-\frac{(\nu-2)}{\psi_0} t} \mathcal{H}_{\nu'}^{(1)}(\kappa \psi_0 e^{-\frac{t}{\psi_0}}),$$

con $\nu' = \frac{\sqrt{\nu^2 + 4\nu(\psi_0^2 - 1) + 4 - 10\psi_0^2}}{\psi_0}$. Escribimos a continuación la solución particular obtenida en el límite cosmológico:

$$(7.32) \quad K_{part}^{(-)}(t, \psi) \simeq -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi} (10 - 4\nu) \kappa^{\nu-1} \psi_0^{\nu-\frac{7}{2}}} + \frac{e^{-\frac{(\nu-2)}{\psi_0} t} \mathcal{H}_{\nu'}^{(1)}(\kappa \psi_0 e^{-\frac{t}{\psi_0}})}{2} \left[1 + \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{2\sqrt{\nu^2 - 3}} \right].$$

Anticipamos que para los valores típicos que manejaremos, es el término constante el que domina la expresión. Esto se debe primero a que la dependencia en ψ desaparece del segundo término luego de hacer la foliación constante, y luego, las variaciones en la amplitud temporal son muy pequeñas en magnitud. Sobre esta cuestión volveremos a hablar luego de hallar la solución homogénea.

De manera similar a lo hecho con los modos $\Phi_{+, \kappa}$, obtenemos tres ecuaciones diferenciales ordinarias para la parte homogénea de la ecuación (7.27). La dependencia espacial de $\Phi_{-, \kappa}$ tiene solución trivial, $R(\vec{r}) = e^{\pm i \vec{k} \cdot \vec{r}}$. Para obtener la dependencia en las variables t y ψ debemos resolver la parte homogénea de la ecuación (7.29).

Expresando $K_{homo}^{(-)}(t, \psi) = T_\kappa^{(-)}(t) \Lambda^{(-)}(\psi)$, y aplicando separación de variables a la misma obtenemos

$$(7.33) \quad \frac{\partial^2 T_\kappa^{(-)}}{\partial t^2} + 2 \frac{(\nu - 2)}{\psi_0} \frac{\partial T_\kappa^{(-)}}{\partial t} + \left(\kappa^2 e^{-\frac{2t}{\psi_0}} - M_2^2 \right) T_\kappa^{(-)} = 0,$$

$$(7.34) \quad \frac{\partial^2 \Lambda^{(-)}}{\partial \psi^2} + 2 \frac{(\frac{1}{2} - \sqrt{\nu^2 - 3})}{\psi} \frac{\partial \Lambda^{(-)}}{\partial \psi} + \left(\frac{\psi_0}{\psi} \right)^2 \left(\frac{4\nu - 10}{\psi_0^2} - M_2^2 \right) \Lambda^{(-)} = 0.$$

La solución a la ecuación (7.34) es

$$\Lambda^{(-)}(\psi) = A_1 \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-\frac{3}{2} + \sqrt{\nu^2 - 4\nu + 7 + M_2^2 \psi_0^2}} + A_2 \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-\frac{3}{2} - \sqrt{\nu^2 - 4\nu + 7 + M_2^2 \psi_0^2}}.$$

Nuevamente, para obtener soluciones localizadas en ψ debemos pedir que $A_1 = 0$, con lo cual $m = \frac{3}{2} + \sqrt{\nu^2 - 4\nu + 7 + M_2^2 \psi_0^2}$ y $m \in \mathbb{R}^+$.

Para que la masa cumpla $M_2^2 = \frac{(m - \frac{3}{2})^2 - (n - \frac{3}{2})^2 + 4\sqrt{(n - \frac{3}{2})^2 + 3 - 10}}{\psi_0^2} \geq 0$ obtenemos una condición para $m > \frac{3}{2} + \sqrt{3 + (\sqrt{(n - \frac{3}{2})^2 + 3 - 2})^2}$ con $n \geq \frac{5}{2}$.

Ahora, la solución de la ecuación (7.33) para los modos dependientes del tiempo de los modos $\Phi_{-, \kappa}$ resulta

$$(7.35) \quad T_{\kappa}^{(-)}(t) = e^{-(\nu-2)H_0 t} \left[B_3 \mathcal{H}_{\mu}^{(1)}\left(\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t}\right) + B_4 \mathcal{H}_{\mu}^{(2)}\left(\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t}\right) \right],$$

donde $\mu = \sqrt{(\nu-2)^2 + M_2^2 \psi_0^2}$.

Aplicando el *vacío de Bunch-Davies* podemos normalizar los modos temporales calculando el conmutador

$$(7.36) \quad \left[\Phi_{-}(t, \vec{r}, H_0^{-1}), \dot{\Phi}_{-}(t, \vec{r}', H_0^{-1}) \right] = i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'),$$

donde Φ_{-} puede ser expandido

$$\Phi_{-}(t, \vec{r}, H_0^{-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{\infty} d^3 \kappa \left[b_{\kappa} \Phi_{-, \kappa}(t, \vec{r}, H_0^{-1}) + b_{\kappa}^{\dagger} \Phi_{-, \kappa}^{*}(t, \vec{r}, H_0^{-1}) \right],$$

con

$$\begin{aligned} \Phi_{-, \kappa}(t, \vec{r}, H_0^{-1}) &= G_{\kappa}^{(-)}(t, \psi) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}, \\ \Phi_{-, \kappa}^{*}(t, \vec{r}, H_0^{-1}) &= (G_{\kappa}^{(-)})^{*}(t, \psi) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}}, \end{aligned}$$

y tal que $b_{\kappa}, b_{\kappa}^{\dagger}$ son los operadores de aniquilación y de creación del campo bosónico efectivo. Los operadores b_{κ} y $b_{\kappa}^{\dagger}$ cumplen con el álgebra, $[b_{\kappa}, b_{\kappa'}^{\dagger}] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$ y $[b_{\kappa}, b_{\kappa'}] = [b_{\kappa}^{\dagger}, b_{\kappa'}^{\dagger}] = 0$. La condición que deben satisfacer $G_{\kappa}^{(-)}$ y $(G_{\kappa}^{(-)})^{*}$ para que la relación (7.36) se preserve es

$$(7.37) \quad e^{2H_0 t} \{ G_{\kappa}^{(-)} (\dot{G}_{\kappa}^{(-)})^{*} - (G_{\kappa}^{(-)})^{*} \dot{G}_{\kappa}^{(-)} \} = i$$

Siguiendo el procedimiento se evalúa la condición (7.37) en el límite ultravioleta $[\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t} \gg 1]$ y al mismo tiempo se toma $B_3 = 0$. Para este caso debemos usar los siguientes límites asintóticos

$$(7.38) \quad G_{\kappa}^{(-)}(t, H_0^{-1}) \sim \sqrt{\frac{2H_0^5}{\pi\kappa}} e^{-\frac{H_0}{2}t} \left\{ B_3 e^{i[\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t} - (\nu+1)\frac{\pi}{2}]} + B_4 e^{-i[\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t} - (\nu+1)\frac{\pi}{2}]} \right\}$$

$$(7.39) \quad (G_{\kappa}^{(-)})^{*}(t, H_0^{-1}) \sim \sqrt{\frac{2H_0^5}{\pi\kappa}} e^{-\frac{H_0}{2}t} \left\{ B_3 e^{-i[\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t} - (\nu+1)\frac{\pi}{2}]} + B_4 e^{i[\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t} - (\nu+1)\frac{\pi}{2}]} \right\}$$

Se obtiene así una amplitud $B_4 = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{H_0^5}}$ para el estado primordial del campo. La constante A_2 correspondiente al modo dependiente de ψ se evaluará con la ecuación de estado cosmológica. Podemos escribir entonces

$$(7.40) \quad T_{\kappa}^{(-)}(t) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{H_0^5}} e^{-(\nu-2)H_0 t} \mathcal{H}_{\mu}^{(2)}\left(\frac{\kappa}{H_0} e^{-H_0 t}\right),$$

que en el límite infrarrojo tiene la forma asintótica

$$(7.41) \quad T_{\kappa}^{(-)}(t) \simeq \frac{2^{\mu-1} H_0^{\mu-\frac{5}{2}} \Gamma(\mu)}{\sqrt{\pi} \kappa^{\mu}} e^{(\mu-\nu+2)H_0 t}.$$

Finalmente, podemos escribir las soluciones $K_{homo}^{(-)}(t, \psi)^7$ y $G_{\kappa}^{(-)}(t, H_0^{-1})$

$$(7.42) \quad K_{homo}^{(-)}(t, \psi) \simeq \frac{2^{\mu-1} \Gamma(\mu)}{\sqrt{\pi}} H_0^{\mu-\frac{5}{2}} \kappa^{-\mu} e^{(\mu-\nu+2)H_0 t} \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-\frac{3}{2} - \sqrt{\nu^2 - 4\nu + 7 + M_2^2 \psi_0^2}},$$

$$(7.43) \quad G_{\kappa}^{(-)}(t, H_0^{-1}) \simeq \frac{2^{\mu-1} \Gamma(\mu)}{\sqrt{\pi}} H_0^{\mu-\frac{1}{2}} \kappa^{-\mu} e^{(\mu-1)H_0 t}.$$

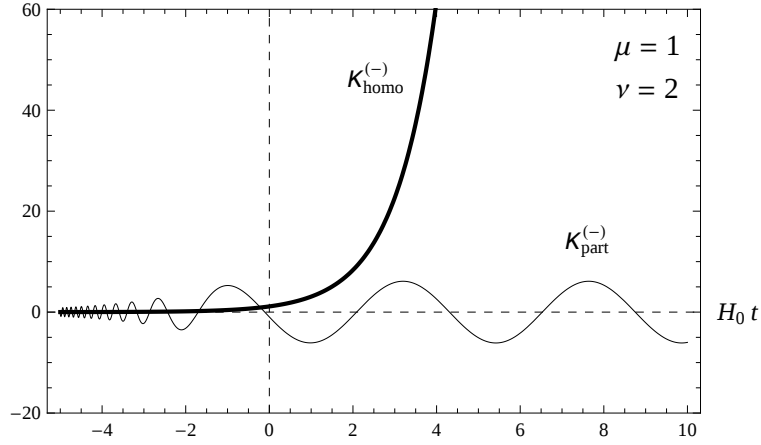


Figura 7.1: $K_{homo}^{(-)}(t, H_0^{-1})$ (en trazo grueso) y la parte real de $K_{part}^{(-)}(t, H_0^{-1})$ (en trazo fino) en función del tiempo. Se tomaron $\psi_0 = H_0^{-1} = 1$ y $\kappa = 0,5H_0$ como parámetros de referencia.

Ahora podemos comparar la solución particular (7.32) con la homogénea (7.42) para valores cosmológicos típicos. Veremos luego que los valores adoptados, $\nu = 2$ y $\mu = 1$, son de particular interés para interpretar físicamente las soluciones.

En la Figura 7.1 representamos ambas soluciones como función del tiempo. En el caso de la solución particular hemos excluido el valor constante negativo ya que en la dinámica sólo tiene significado la parte variable en el tiempo. Vemos que la solución homogénea se dispara exponencialmente mientras que la particular oscila con frecuencia constante para valores crecientes del tiempo. Este comportamiento se mantiene independientemente de los parámetros adoptados en el gráfico.

Ahora podemos escribir el regimen asintótico de los modos $\Phi_{-, \kappa}$ aproximando la solución de la parte homogénea de la ecuación (7.28)

$$(7.44) \quad \Phi_{-, \kappa}(t, \vec{r}, \psi) \simeq A_2 \frac{2^{\mu-1} \Gamma(\mu)}{\sqrt{\pi}} H_0^{\mu-\frac{1}{2}} \kappa^{-\mu} e^{(\mu-1) H_0 t + i \vec{k} \cdot \vec{r}} \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-(m+\frac{3}{2}+\sqrt{\nu^2-3})}$$

que, sobre una hipersuperficie 4D con $\psi = \psi_0 = H_0^{-1}$, adopta la forma

$$(7.45) \quad \Phi_{-, \kappa}(t, \vec{r}, H_0^{-1}) \simeq A_2 \frac{2^{\mu-1} \Gamma(\mu)}{\sqrt{\pi}} H_0^{\mu-\frac{1}{2}} \kappa^{-\mu} e^{(\mu-1) H_0 t + i \vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

7.4. Ecuaciones de Einstein en 4D

La densidad Lagrangiana efectiva en 4D que proviene de la ecuación (7.17) se puede expresar en términos de los campos $\Phi_{\pm}(x^{\mu}, \psi_0)$, que operan como dos bosones masivos mínimamente acoplados

$$(7.46) \quad \mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} [\nabla_{\mu} \bar{\Phi}_{+} \nabla^{\mu} \Phi_{+} + \nabla_{\mu} \bar{\Phi}_{-} \nabla^{\mu} \Phi_{-}] + V(\Phi_{+}, \Phi_{-}).$$

⁷Luego se incluirá la constante A_2 asociada al modo en ψ .

Para poder calcular $V(\Phi_+, \Phi_-)$ debemos obtener las derivadas covariantes

$$(7.47) \quad \nabla_4 \bar{\Phi}_+ = \frac{\partial \bar{\Phi}_+}{\partial \psi} (1 \ 1) = -(n/\psi) \bar{\Phi}_+ (1 \ 1),$$

$$(7.48) \quad \nabla_4 \bar{\Phi}_- = \frac{\partial \bar{\Phi}_-}{\partial \psi} (1 \ 1) = -(m/\psi) \bar{\Phi}_- (1 \ 1),$$

$$(7.49) \quad \nabla_4 \Phi_+ = \frac{\partial \Phi_+}{\partial \psi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -(n/\psi) \Phi_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(7.50) \quad \nabla_4 \Phi_- = \frac{\partial \Phi_-}{\partial \psi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -(m/\psi) \Phi_- \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con ellas se obtiene el potencial efectivo en 4D

$$(7.51) \quad \begin{aligned} V(\Phi_+, \Phi_-) &= -\frac{1}{4} [\nabla_4 \bar{\Phi}_+ \nabla^4 \Phi_+ + \nabla_4 \bar{\Phi}_- \nabla^4 \Phi_-] \Big|_{\psi=1/H_0} \\ &= \frac{H_0^2}{4} (n^2 \|\Phi_+\|^2 + m^2 \|\Phi_-\|^2) \Big|_{\psi=1/H_0}, \end{aligned}$$

el cual viene inducido por la foliación estática sobre la quinta coordenada $\psi = \psi_0 = H_0^{-1}$. Este potencial efectivo en 4D es el responsable de proveernos la dinámica de los campos $\Phi_{\pm}(x^\mu, \psi_0)$ en la hipersuperficie efectiva 4D sobre la que es válida la ecuación de estado $\omega = P/\rho = -1$.

La densidad de energía y la presión relacionados con estos campos se obtienen de la parte diagonal del tensor energía-impulso escrito de modo mixto

$$(7.52) \quad \begin{aligned} \rho &= \langle E | \frac{1}{4} (\|\nabla_0 \Phi_+\|^2 + \|\nabla_0 \Phi_-\|^2) \\ &\quad - \frac{e^{-2H_0 t}}{4} (\vec{\nabla} \bar{\Phi}_+ \cdot \vec{\nabla} \Phi_+ + \vec{\nabla} \bar{\Phi}_- \cdot \vec{\nabla} \Phi_-) + V(\Phi_+, \Phi_-) + F_0^0 |E \rangle \Big|_{\psi=1/H_0}, \end{aligned}$$

$$(7.53) \quad \begin{aligned} P &= \langle E | \frac{1}{4} (\|\nabla_0 \Phi_+\|^2 + \|\nabla_0 \Phi_-\|^2) \\ &\quad - \frac{e^{-2H_0 t}}{12} (\vec{\nabla} \bar{\Phi}_+ \cdot \vec{\nabla} \Phi_+ + \vec{\nabla} \bar{\Phi}_- \cdot \vec{\nabla} \Phi_-) - V(\Phi_+, \Phi_-) + F_j^i \delta_i^j |E \rangle \Big|_{\psi=1/H_0}, \end{aligned}$$

donde $\langle E | \dots | E \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \dots d^3 k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \dots d\Omega \kappa^2 d\kappa = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\kappa_*}^{\epsilon \kappa_*} \dots \kappa^2 d\kappa$ representa el valor de espectación de los estados cuánticos $|E\rangle$ del sistema.

Si bien los campos efectivos están mínimamente acoplados consideraremos que la corriente (7.4) no lo está y tiene constantes de acoplamiento, las que serán evaluadas con la ecuación de

estado. Entonces $F_0^0 = C_3/\pi \left[\frac{H_0^7}{8k^2} + \frac{H_0^9}{k^4} \right]$, $F_j^i = A_3/\pi \left[\frac{15H_0^7}{32k^2} + \frac{H_0^9}{2k^4} \right] \delta_j^i$ y

$$(7.54) \quad \nabla_0 \Phi_{\pm} = \left[\partial_0 \pm \frac{1}{4\psi_0} \right] \Phi_{\pm} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(7.55) \quad \nabla_j \Phi_+ = \partial_j \Phi_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(7.56) \quad \nabla_1 \Phi_- = \left[\partial_1 \Phi_- + i \frac{H_0 e^{H_0 t}}{2} \Phi_- \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(7.57) \quad \nabla_2 \Phi_- = \partial_2 \Phi_- \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \frac{H_0 e^{H_0 t}}{2} \Phi_- \begin{pmatrix} -i \\ i \end{pmatrix},$$

$$(7.58) \quad \nabla_3 \Phi_- = \partial_3 \Phi_- \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \frac{H_0 e^{H_0 t}}{2} \Phi_- \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(7.59) \quad \nabla_1 \bar{\Phi}_- = \left[\partial_1 \Phi_-^* - i \frac{H_0 e^{H_0 t}}{2} \Phi_-^* \right] (1 \ 1),$$

$$(7.60) \quad \nabla_2 \bar{\Phi}_- = \partial_2 \Phi_-^* (1 \ 1) - i \frac{H_0 e^{H_0 t}}{2} \Phi_-^* (i \ -i),$$

$$(7.61) \quad \nabla_3 \bar{\Phi}_- = \partial_3 \Phi_-^* (1 \ 1) - i \frac{H_0 e^{H_0 t}}{2} \Phi_-^* (1 \ -1).$$

Las soluciones con valores $\mu = 1$ y $\nu = 2$ corresponden a estados estacionarios, es decir, $\partial_0 \Phi_{\pm} = 0$. En estas condiciones debemos tomar estados fundamentales con valores $n = 5/2$, $m = 7/2$ (se toman valores racionales por simplicidad).

Con estos valores los modos dependientes del tiempo de los campos Φ_+ y Φ_- tendrán masas $M_1^2 = 0$ y $M_2^2 = H_0^2$ respectivamente. Las *masas efectivas* de los campos, tal cual figuran en el potencial (7.51) son $\mu_1^2 = \frac{H_0^2}{4} n^2 = \frac{25}{16} H_0^2$ y $\mu_2^2 = \frac{H_0^2}{4} m^2 = \frac{49}{16} H_0^2$. Si consideramos los valores de expectación de cierto escalar cuadrático $\Sigma^2(\vec{r}, t)$ podemos obtener una interesante solución asintótica,

$$(7.62) \quad \Sigma^2(t) = \langle E | \Sigma^2(\vec{r}, t) | E \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_*}^{\epsilon k_0^{\pm}(t)} d^3 k \Sigma_{\kappa}(\vec{r}, t) \Sigma_{\kappa}^*(\vec{r}, t),$$

donde $k_* > 0$ es cierto valor mínimo para el número de onda (cutoff) que debe ser determinado y $k_0^+(t) = 2H_0 e^{H_0 t}$, $k_0^-(t) = H_0 e^{H_0 t}$ son los valores máximos del número de onda para Φ_+ y Φ_- respectivamente. Los valores de espectación para la densidad de energía ρ y la presión P están dados por las siguientes expresiones:

$$(7.63) \quad \rho = \left[A_2^2 \left(\frac{173H_0^4 \epsilon}{128\pi^3} - \frac{\epsilon^3 H_0^4}{24\pi^3} \right) + C_3 \frac{H_0^8 \epsilon}{16\pi^3} \right] e^{H_0 t} - A_2^2 \frac{173k_* H_0^3}{128\pi^3} + C_1^2 \frac{101H_0^5}{32k_* \pi^3} \\ + C_3 \left(-\frac{k_* H_0^7}{16\pi^3} + \frac{H_0^9}{2k_* \pi^3} \right) - \left[C_1^2 \left(\frac{101H_0^4}{64\pi^3 \epsilon} + \frac{H_0^4 \epsilon}{\pi^3} \right) + C_3 \frac{H_0^8}{4\pi^3 \epsilon} \right] e^{-H_0 t} \\ + \left[C_1^2 \frac{k_* H_0^3}{2\pi^3} + A_2^2 \frac{k_*^3 H_0}{24\pi^3} \right] e^{-2H_0 t},$$

$$(7.64) \quad P = \left[A_3 \frac{15H_0^8 \epsilon}{64\pi^3} - A_2^2 \left(\frac{219H_0^4 \epsilon}{128\pi^3} + \frac{H_0^4 \epsilon^3}{24\pi^3} \right) \right] e^{H_0 t} - C_1^2 \frac{99H_0^5}{32k_* \pi^3} + A_2^2 \frac{219k_* H_0^3}{128\pi^3} \\ + A_3 \left(-\frac{15k_* H_0^7}{64\pi^3} + \frac{H_0^9}{4k_* \pi^3} \right) + \left[C_1^2 \left(\frac{99H_0^4}{64\pi^3 \epsilon} - \frac{H_0^4 \epsilon}{\pi^3} \right) - A_3 \frac{H_0^8}{8\pi^3 \epsilon} \right] e^{-H_0 t} \\ + \left[A_2^2 \frac{k_*^3 H_0}{24\pi^3} + C_1^2 \frac{k_* H_0^3}{2\pi^3} \right] e^{-2H_0 t}.$$

Si cancelamos los coeficientes que corresponden a los factores con $e^{\pm H_0 t}$ y luego pedimos que se cumpla $\rho = -P = 3H_0^2/(8\pi G)$, obtenemos

$$(7.65) \quad C_1^2 = \frac{6k_*\pi^2(-519 + 16\epsilon^2)}{[32H_0^2(-519 + 16\epsilon^2) - k_*^2(101 + 64\epsilon^2)]} = \frac{12k_*\pi^2(657 + 16\epsilon^2)}{[64H_0^2(657 + 16\epsilon^2) - 15k_*^2(-99 + 64\epsilon^2)]},$$

$$(7.66) \quad A_2^2 = -\frac{3C_1^2(101 + 64\epsilon^2)}{2(-519 + 16\epsilon^2)} = -\frac{45C_1^2(-99 + 64\epsilon^2)}{4(657 + 16\epsilon^2)},$$

$$(7.67) \quad C_3 = -\frac{C_1^2(101 + 64\epsilon^2)}{16H_0^4},$$

$$(7.68) \quad A_3 = -\frac{C_1^2(-99 + 64\epsilon^2)}{8H_0^4},$$

de tal forma que, usando (7.66) obtenemos $\epsilon = -6,68586, -1,03546, 1,03546$ y $6,68586$. Sólo los dos últimos son aceptables como cotas superiores pero a partir del mayor de ellos obtenemos un único valor real de k_* , como veremos a continuación. Usando la relación $\rho = -P$ nos queda una ecuación con incognita k_* :

$$(7.69) \quad \frac{32H_0^2(519 - 16\epsilon^2) + k_*^2(101 + 64\epsilon^2)}{k_*(-519 + 16\epsilon^2)} = \frac{64H_0^2(657 + 16\epsilon^2) - 15k_*^2(-99 + 64\epsilon^2)}{2k_*(657 + 16\epsilon^2)}$$

Ahora podemos evaluar k_* con $\epsilon = 1,03546$ y $6,68586$. Para el primer valor de ϵ se obtiene $k_* = \pm i 9,73022 \times 10^{-9}$ y 0, donde los valores puramente imaginarios no tienen significado y cero es solución trivial. Para $\epsilon = 6,68586$ se obtiene $k_* = \pm 1,45598 \times 10^{-9}$ y 0, donde descartamos la solución trivial y el valor negativo.

Es importante remarcar que en P y ρ hemos despreciado términos que son muy pequeños respecto de $3H_0^2/(8\pi G)$ y decrecen como $e^{-2H_0 t}$. Con los valores obtenidos para $\epsilon = 6,68586$ y $k_* = 1,45598 H_0 = 1,45598 \times 10^{-9} \text{ M}_p$, llegamos a los siguientes valores numéricos de las constantes a evaluar: $(C_1)^2 = -2,63042 \times 10^{32}$, $(A_2)^2 = 5,95601 \times 10^{33}$, $C_3 = 4,8693 \times 10^{70} \text{ M}_p^{-4}$, $A_3 = 9,081 \times 10^{70} \text{ M}_p^{-4}$, que corresponden a los siguientes valores de densidad y presión, $\rho = -P = 1,19366 \times 10^{-19} \text{ M}_p^4$.

Estos valores están perfectamente de acuerdo con los que uno esperaría obtener hacia el final de una expansión inflacionaria dominada por vacío en el universo primordial. Un resultado muy importante se obtiene del análisis de los valores máximo y mínimo (cutoffs) para los valores de κ . A saber, la *energía oscura* yace fuera del horizonte causal al comienzo de inflación, pero durante la era inflacionaria ingresa a regiones causalmente conectadas. O sea, la *energía oscura* esta concentrada en un rango de escalas dadas por la siguiente desigualdad, $2\pi/(\epsilon k_0^+(t)) \simeq (\pi/H_0)e^{-H_0 t} < \lambda < 2\pi/k_*$. Numéricamente

$$(7.70) \quad \frac{0,47}{H_0} e^{-H_0 t} \lesssim \lambda \lesssim \frac{4,31}{H_0}.$$

Esto muestra que el bosón escalar efectivo masivo Φ_+ podría ser un candidato para explicar la *energía oscura* en el universo primordial inflacionario.

En otros modelos se llega a resultados similares, aunque describen finales extremos para el universo. Los casos de “energía oscura fantasma” corresponden a modelos con un término cinético negativo en la Lagrangiana y algún término de potencial. Estos modelos proveen de un mecanismo natural para obtener una ecuación de estado con parámetro ω apenas menor que -1 . Observaciones recientes sugieren que ω está muy cercano al valor -1 y en un rango $-1,1 < \omega < -0,9$ ((Wood-Vasey et al., 2007), (Davis et al., 2007)). Estos modelos tienen varias propiedades interesantes. Por ejemplo, la densidad de energía aumenta con el factor de escala, y puede hacerse infinita para tiempo finito, lo que se conoce como “Big rip” (Gran Desgarramiento) ((Scherrer y Sen, 2008)).

La presión negativa de la energía oscura podría ser la causa de la aceleración del universo en la actualidad. Así, aun con viscosidad, el campo fantasma es un estado inestable (como se esperaría) y ω tiende a -1 en el límite de tiempos grandes ((Amirhashchi y Pradhan, 2014)).

7.5. Conclusión del capítulo

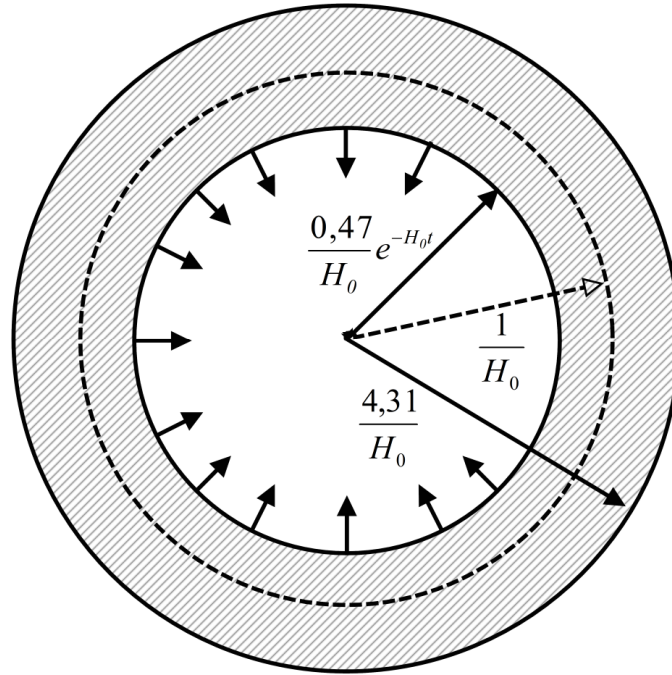


Figura 7.2: Esquema para la longitud de onda λ . La circunferencia en línea de trazos representa el horizonte causal. Las flechas en la circunferencia interna representan aquella parte del campo que ingresó a la región causalmente conectada.

En este capítulo hemos explorado la posibilidad de que la expansión del universo durante la fase inflacionaria primordial pudo ser provocada por un condensado de campos espinoriales. En esta representación los campos efectivos $\Phi_{\pm}$ provienen de un condensado de espinores en estado de *entanglement* o *entrelazamiento cuántico*. Los campos $\Phi_{\pm}$ se desacoplan al final de inflación. Cabe remarcar que en todo el análisis despreciamos el rol del campo inflatón, el cual está (durante una expansión de de-Sitter) congelado en amplitud y aproximadamente se mantiene invariante de escala; aunque decae en otros campos al final de inflación.

La cuestión es cómo se puede explicar la existencia de energía oscura una vez que la densidad de energía del campo inflatón tiende a cero. Nuestra propuesta consiste en probar que la energía oscura podría ser físicamente explicada a través del *entanglement* de campos espinoriales que se comportan como campos bosónicos efectivos de espín-1 y espín-0 sobre una hipersuperficie 4D en la cual el universo sufre una expansión dominada por vacío.

La ecuación de estado del modelo queda determinada por la foliación estática $\psi = 1/H_0$. Los cálculos realizados muestran que el campo bosónico Φ_+ es menos masivo que el Φ_- y con espín 0. Por lo tanto es así compatible con las propiedades de un bosón escalar masivo. Dicho campo podría ser responsable (junto con el inflatón) de la expansión del universo y además un buen candidato para explicar la existencia de energía oscura [Otros campos tales como el curvatón (Mazumdar y Rocher, 2011) se han propuesto para explicar dicho fenómeno].

Por otra parte el campo Φ_- , de espín 1, se comporta como un bosón vectorial masivo (con *masa efectiva* $\mu_2 = \frac{7}{4}H_0$). Un hecho interesante es que la densidad de energía oscura se encuentra ingresando en el horizonte causal de nuestro universo, acompañando la evolución de la expansión inflacionaria, lo que representamos esquemáticamente en la Figura 7.2.

Parte IV

Conclusiones Generales

Como parte del programa de investigación propuesto en el plan de tesis doctoral se estudió el álgebra de espinores en un espacio-tiempo curvo en 4D/5D cubriendo diferentes tópicos de interés. En el contexto de las teorías de materia inducida se exploraron diferentes opciones: estudio de objetos compactos y desarrollo de modelos cosmológicos que alcanzaron en gran parte los objetivos fijados inicialmente. Si bien quedan muchas cosas por hacer también se desarrollaron temas colaterales a los propuestos originalmente, que condujeron a resultados interesantes tanto en el marco cosmológico como en el de la física de partículas. Todos los objetivos alcanzados se plasmaron en varias publicaciones con referato en revistas de nivel internacional, y uno de nuestros mayores orgullos, una mención de honor otorgada por la *Gravity Research Foundation* (año 2013), por nuestro modelo de condensado de espinores para explicar el origen de la energía oscura.

Modos cuasi-normales en una métrica de Schwarzschild. El trabajo exploratorio del **Capítulo 4** nos sirvió para poner en práctica lo aprendido en los capítulos preparatorios (Capítulos 1, 2 y 3), y adicionalmente obtener algún resultado de interés físico sobre los modos cuasi-normales en una métrica de Schwarzschild en 4D (el problema de los neutrinos en un agujero negro). Al resolver la ecuación de Dirac en coordenadas esféricas, se obtienen dos ecuaciones radiales tipo Schrödinger sujetas a potenciales conocidos como supersimétricos. Este primer resultado simplifica las soluciones ya que, al tener ambas ecuaciones el mismo espectro de modos cuasi-normales, sólo debemos encontrar solución a una de ellas. El método seguido para resolverla fue el de expresar el superpotencial en términos de la función de Lambert y luego aproximar dicho potencial en la región de interés, el horizonte del agujero negro. Las ecuaciones resultantes son generalizaciones del problema de los niveles vibracionales de las moléculas diatómicas. En este caso, la solución a la cuantización de los modos fue resuelta por Morse, y así planteamos la solución a nuestro problema siguiendo los mismos pasos. El resultado nos permitió obtener de manera directa las autofunciones y los autovalores para los modos cuasi-normales, y a partir de estos, la temperatura de Hawking del agujero negro. Los estados asintóticos (y sus compañeros supersimétricos) tienen frecuencias imaginarias puras, aunque el estado fundamental aislado tiene un autovalor de energía nulo, en concordancia con lo que uno esperaría de las Hamiltonianas supersimétricas. Así, todos los modos asintóticos, con excepción del modo estable nulo, corresponden a estados que decaen.

Neutrinos masivos desde un vacío en 5D. El **Capítulo 5** es la primera aplicación directa de los campos de prueba fermiónicos (de espín 1/2) en un contexto de materia inducida. Se explora el problema de los modos cuasi-normales para partículas tipo neutrino con masa en una métrica de Schwarzschild-de Sitter en 4D, a partir de campos de prueba sin masa en

una métrica en 5D. Sobre esta última definimos un vacío, y así los espinores se consideran como campos fermiónicos de prueba sin masa y no interactuantes mínimamente acoplados con la gravedad. Físicamente, la métrica de fondo empleada describe una extensión en 5D de un espacio-tiempo Schwarzschild-de Sitter usual en 4D. La geometría del embebimiento condiciona la solución de forma que los modos no se propagan en la coordenada extra, indicando algún tipo de confinamiento sobre la hipersuperficie 4D. Otro resultado notable es el hecho que las soluciones no divergentes de la ecuación para la coordenada extra tienen como consecuencia una discretización de los valores de la masa inducida.

Cosmología de neutrinos masivos en un formalismo de materia inducida. En el **Capítulo 6** se tomó la partícula de prueba sin masa en un vacío en 5D y se la llevó al límite de una métrica cosmológica (de Sitter) en 4D. De esta manera recuperamos la masa de los neutrinos (de la misma forma que lo hecho en el Capítulo 5). Aquí, la métrica de fondo empleada es la de Ponce de León, que es una generalización del espacio-tiempo de de-Sitter usual en 4D. Del análisis de las soluciones al problema de modos cuasi-normales se obtuvo discretización en la masa inducida, y adicionalmente la geometría del embebimiento impuso una cota a los valores positivos de dichas masas. Sólo pueden darse tres valores, de los cuales dos son no nulos. Las soluciones para la ecuación de la coordenada extra manifiestan algún tipo de confinamiento. Los valores de las masas dependen de $\psi_0 = 1/H_0$, que es el valor tomado para foliar la coordenada extra. Desde el punto de vista físico dependen de la constante de Hubble durante inflación, siendo éste un parámetro en principio medible. Al extrapolar el valor actual del parámetro de Hubble la masa más grande debería tomar un valor $2 \times 10^{-12} \text{eV}$. Este es un resultado muy fuerte, en concordancia con valores experimentales obtenidos recientemente. Más importante aún es que las masas de los neutrinos cosmológicos dependen de la escala de energía del universo, puesto que dependen del parámetro de Hubble. Sin embargo este resultado debe tomarse con cuidado ya que hemos despreciado cualquier tipo de interacción del espinor con otros campos.

Energía oscura en un formalismo de materia inducida. Recordemos que en el Capítulo 1 se plantearon las condiciones bajo las cuales un campo espinorial resulta en un candidato razonable para describir energía oscura. Un campo espinorial debe tener carácter no-local manifiesto y debe satisfacer invariancia de Lorentz (al menos a escalas astrofísicas). El **Capítulo 7** presenta un modelo para campos espinoriales sin masa en un vacío en 5D que derivan en campos fermiónicos masivos en una métrica cosmológica en 4D. Del estudio de la ecuación de segundo orden para el condensado de espinores resultante, se obtienen soluciones bosónicas, una de las cuales (la de espín cero), satisface las ecuaciones de estado para un universo que se expande gobernado por una ecuación de estado de vacío. Dichas soluciones son manifiestamente no-locales y asintóticamente invariantes de Lorentz. Se estudia una interpretación para la longitud de onda física basada en un modelo cosmológico tratado en el Capítulo 3. En esta representación los campos efectivos provienen de un condensado de espinores en estado de entanglement o entrelazamiento cuántico. Aplicando una transformación conforme a las ecuaciones espinoriales se obtienen dos ecuaciones que describen dos campos escalares (por reducción del espinor a uno con todas las componentes idénticas). La primera de ellas, que corresponde al primer campo efectivo, es homogénea y no acoplada; la segunda, que describe la evolución del segundo campo efectivo, tiene un término inhomogéneo dependiente del primer campo. Los campos se desacoplan al final de inflación, puesto que el término inhomogéneo decae, resultando en dos ecuaciones homogéneas desacopladas. Cabe remarcar que en todo el análisis despreciamos el rol del campo inflatón, el cual está (durante una expansión de de-Sitter) congelado en amplitud y aproximadamente se mantiene invariante de escala; aunque decae en otros campos al final de inflación. La cuestión es cómo se puede explicar la existencia de energía oscura una vez que la densidad de energía del campo inflatón tiende a cero. Nuestra propuesta consiste

en probar que la energía oscura podría ser físicamente explicada a través del entanglement de campos espinoriales que se comportan como campos bosónicos efectivos de espín-1 y espín-0 sobre una hipersuperficie 4D en la cual el universo sufre una expansión dominada por vacío. La ecuación de estado del modelo queda determinada por la foliación estática $\psi = 1/H_0$. Los cálculos realizados muestran que el campo bosónico Φ_+ tiene una masa efectiva $\mu_1 = 5/4H_0$ y por lo tanto es menos masivo que el Φ_- , y con espín 0. Dicho campo podría ser responsable (junto con el inflatón) de la expansión del universo y además un buen candidato para explicar la existencia de energía oscura. Un hecho interesante es que la densidad de energía oscura se encuentra ingresando en el horizonte causal de nuestro universo, acompañando la evolución de la expansión inflacionaria. Se sabe que la dinámica del espacio-tiempo genera entrelazamiento (entanglement) entre ciertos modos de campos cuánticos (Ball et al., 2006). A su vez, el entrelazamiento codifica la información relativa a la estructura del espacio-tiempo subyacente, lo que deja entrever la perspectiva de aplicaciones a la cosmología. Es importante destacar que los casos de campos masivo y no masivo son cualitativamente bastante distintos entre sí. Lo notable es que la información sobre el espacio-tiempo subyacente puede ser recuperada aún en el caso del entrelazamiento de campos muy poco masivos.

Por otra parte el campo Φ_- tiene espín 1 y se comporta como un bosón vectorial masivo con masa efectiva $\mu_2 = 7/4H_0$, por lo que es compatible con las propiedades de un bosón vectorial masivo.

Parte V

Apéndices

Apéndice A

Tensor energía-impulso

Para el cálculo del tensor energía-impulso debemos variar, respecto de la métrica $g_{\mu\nu}$, la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_\Psi(\Psi, \bar{\Psi}) + \mathcal{L}_P$. Existen dos contribuciones, la primera proviene del primer término (supuesto sin auto-interacciones para simplificar los cálculos) y la segunda del término que depende de $\mathcal{P}$

$$(A.1) \quad T_\Psi^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\Psi)}{\delta g_{\mu\nu}},$$

$$(A.2) \quad T_P^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_P)}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

A su vez el primer término puede provenir de cualquiera de las dos densidades (1.71) o (1.72), aunque nos concentraremos en el cálculo de la primera (la segunda puede obtenerse de manera similar).

Ahora, a partir de la densidad conocida sin auto-interacciones

$$(A.3) \quad \mathcal{L}_\Psi^{(1)} = \bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla} \Psi = \bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftarrow{\nabla}_\mu \gamma^\nu \nabla_\nu \Psi,$$

podemos calcular la derivada funcional que nos lleve a la componente del tensor energía-impulso correspondiente al campo

$$(A.4) \quad \begin{aligned} T_\Psi^{(1)\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\Psi^{(1)})}{\delta g_{\mu\nu}} = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g_{\mu\nu}} \mathcal{L}_\Psi^{(1)} - \frac{2}{\sqrt{-g}} \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}_\Psi^{(1)}}{\delta g_{\mu\nu}} = \\ &= -g^{\mu\nu} \mathcal{L}_\Psi^{(1)} - 2 \frac{\delta \mathcal{L}_\Psi^{(1)}}{\delta g_{\mu\nu}}. \end{aligned}$$

Aquí hemos usado el resultado

$$(A.5) \quad \frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu}.$$

A su vez, necesitamos evaluar la derivada funcional de la densidad correspondiente

$$(A.6) \quad \begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_\Psi^{(1)}}{\delta g_{\mu\nu}} &= \bar{\Psi} \frac{\delta \gamma^\rho}{\delta g_{\mu\nu}} \overleftarrow{\nabla}_\rho \gamma^\theta \nabla_\theta \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\rho \frac{\delta \overleftarrow{\nabla}_\rho}{\delta g_{\mu\nu}} \gamma^\theta \nabla_\theta \Psi + \\ &+ \bar{\Psi} \gamma^\rho \overleftarrow{\nabla}_\rho \frac{\delta \gamma^\theta}{\delta g_{\mu\nu}} \nabla_\theta \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\rho \overleftarrow{\nabla}_\rho \gamma^\theta \frac{\delta \nabla_\theta}{\delta g_{\mu\nu}} \Psi. \end{aligned}$$

Como se ve en esta última expresión, se necesita conocer la variación (o la derivada funcional) de algunos de los términos de la acción. Esto se llevará a cabo en las siguientes secciones.

A.1. Cálculo de $\delta\gamma^\rho$

Sabemos que $\gamma^\rho = e_a^\rho \gamma^a$, por lo tanto

$$(A.7) \quad \delta\gamma^\rho = \delta e_a^\rho \gamma^a.$$

Dado que la delta de Kronecker es isomorfa frente a cambios de coordenadas (si las coordenadas son ortogonales), su variación respecto de $g_{\mu\nu}$ es nula, entonces la variación de la expresión $e_a^\rho e_\rho^b = \delta_a^b$ da el siguiente resultado:

$$(A.8) \quad \delta e_a^\rho = -e_b^\rho e_a^\theta \delta e_\theta^b.$$

Aplicando esta última en (A.7) obtenemos

$$(A.9) \quad \delta\gamma^\rho = -e_b^\rho e_a^\theta \delta e_\theta^b \gamma^a.$$

A continuación calcularemos la variación de $g_{\mu\nu}$, partiendo de la expresión $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$, como sigue

$$(A.10) \quad \delta g_{\mu\nu} = \delta e_{\mu a} e_\nu^a + e_\mu^a \delta e_{\nu a} = 2e_{(\mu}^a \delta e_{\nu)a}.$$

Retomamos el cálculo de la expresión final para la variación de γ^ρ

$$(A.11) \quad \begin{aligned} \delta\gamma^\rho &= -e_b^\rho e_a^\theta \delta e_\theta^b \gamma^a = -e_b^\rho \delta e_\theta^b \gamma^\theta = \\ &= -e^{\rho b} \delta e_{\theta b} \gamma^\theta = \\ &= -g^{\nu\rho} e_\nu^b \delta e_{\theta b} \gamma^\theta = \\ &= -\frac{1}{2} g^{\nu\rho} \delta g_{\nu\theta} \gamma^\theta. \end{aligned}$$

El término $g^{\nu\rho} \delta g_{\nu\theta} \gamma^\theta$ es simétrico respecto a la permutación de los índices ν y θ . Por lo tanto

$$(A.12) \quad \delta\gamma^\rho = -\frac{1}{2} g^{(\nu\rho} \delta g_{\nu\theta} \gamma^{\theta)}.$$

Finalmente, podemos expresar

$$(A.13) \quad \begin{aligned} \frac{\delta\gamma^\rho}{\delta g_{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2} g^{(\theta\rho} \frac{\delta g_{\theta\xi}}{\delta g_{\mu\nu}} \gamma^\xi = \\ &= -\frac{1}{2} g^{(\theta\rho} \frac{\delta[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} \delta_\mu^\theta \delta_\nu^\xi \gamma^\xi = \\ &= -\frac{1}{2} g^{(\mu\rho} \gamma^{\nu)}. \end{aligned}$$

A.2. Cálculo de $\delta\nabla_\mu$

La derivada covariante del espinor Ψ , se puede escribir como ya se ha visto en la ecuación (1.18) de la siguiente forma

$$\nabla_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - \Gamma_\mu \Psi.$$

Aquí, la conexión espinorial es $\Gamma_\mu = \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} f_{ab}$, con $f^{ab} = \frac{i}{2} [\gamma^a, \gamma^b]$, de tal forma que podemos expresar $\Gamma_\mu = -\frac{1}{8} \omega_\mu^{ab} [\gamma_a, \gamma_b]$. Sabemos además que $\omega_\mu^{ab} = e_\nu^a (e^{\nu b})_{;\mu}$. Por lo tanto

$$(A.14) \quad \begin{aligned} \delta\omega_\mu^{ab} &= \delta e_\nu^a (e^{\nu b})_{;\mu} + e_\nu^a \delta(e^{\nu b})_{;\mu} = \\ &= \delta e_\nu^a (e^{\nu b})_{;\mu} + e_\nu^a \delta[\partial_\mu e^{\nu b}] + e_\nu^a \delta[\Gamma_{\mu\rho}^\nu e^{\rho b}] = \\ &= \delta e_\nu^a (e^{\nu b})_{;\mu} + e_\nu^a \partial_\mu \delta e^{\nu b} + e_\nu^a \delta\Gamma_{\mu\rho}^\nu e^{\rho b} + e_\nu^a \Gamma_{\mu\rho}^\nu \delta e^{\rho b} = \\ &= \delta e_\nu^a (e^{\nu b})_{;\mu} + e_\nu^a (\delta e^{\nu b})_{;\mu} + e_\nu^a \delta\Gamma_{\mu\rho}^\nu e^{\rho b}. \end{aligned}$$

Puesto que sabemos que la conexión de espín ω_μ^{ab} depende de e_ν^a y consecuentemente de $g_{\mu\nu}$, podemos así calcular $\delta\omega_\mu^{ab}$ en un “marco inercial local” L.I.F. (por Local Inertial Frame).

Un L.I.F. queda definido por $e_\nu^a = \delta_\nu^a$; entonces puede demostrarse que

$$(A.15) \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu},$$

$$(A.16) \quad \partial_\mu e_\nu^a = 0,$$

$$(A.17) \quad g_{\mu\nu,\rho} = 0,$$

$$(A.18) \quad \Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0.$$

Ahora podemos calcular $\delta\omega_\mu^{ab}$ en el caso particular de un L.I.F. haciendo uso de la lista de propiedades (A.15, A.16, A.17, A.18)

$$\begin{aligned} \delta\omega_\mu^{ab} \Big|_{LIF} &= e_\nu^a \partial_\mu \delta e_\nu^b + \frac{1}{2} e_\nu^a e^{\rho b} g^{\nu\theta} (\delta g_{\theta\mu,\rho} + \delta g_{\theta\rho,\mu} - \delta g_{\mu\rho,\theta}) \\ &= -e^{\nu b} \partial_\mu \delta e_\nu^a + \frac{1}{2} e^{a\theta} e^{\rho b} (\delta g_{\theta\mu,\rho} + \delta g_{\theta\rho,\mu} - \delta g_{\mu\rho,\theta}). \end{aligned}$$

En la última hemos derivado $e_\nu^a e^{\nu b} = \eta^{ab}$ respecto del índice μ , y luego variado el resultado respecto de $g_{\mu\nu}$ para obtener $e_\nu^a \partial_\mu \delta e_\nu^b = -e^{\nu b} \partial_\mu \delta e_\nu^a$. Usando (A.10) podemos demostrar que

$$\begin{aligned} \delta\omega_\mu^{ab} \Big|_{LIF} &= -e^{\nu b} \partial_\mu [\delta_\nu^a \delta e_\nu^d] + \frac{1}{2} e^{a\theta} e^{\rho b} \delta g_{\theta\mu,\rho} + \frac{1}{2} e^{a\theta} e^{\rho b} (\delta g_{\theta\rho,\mu} - \delta g_{\mu\rho,\theta}) = \\ &= -e^{\nu b} \partial_\mu [e^{\sigma a} e_{\sigma d} \delta e_\nu^d] + \frac{1}{2} e^{a\theta} e^{\rho b} \partial_\mu [e_{\rho d} \delta e_\theta^d + e_{\theta d} \delta e_\rho^d] + \frac{1}{2} [e^{a\rho} e^{\theta b} - e^{a\theta} e^{\rho b}] \delta g_{\mu\rho,\theta} = \\ &= \frac{1}{2} e^{a\theta} e^{\rho b} \partial_\mu [e_{\rho d} \delta e_\theta^d] - \frac{1}{2} e^{a\theta} e^{\rho b} \partial_\mu [e_{\theta d} \delta e_\rho^d] + e^{[a\rho} e^{\theta b]} \delta g_{\mu\rho,\theta} = \\ &= e^{[a\theta} e^{\rho b]} \partial_\mu [e_{\rho d} \delta e_\theta^d] + e^{[a\rho} e^{\theta b]} \delta g_{\mu\rho,\theta} = \\ &= -e^{[a\theta} e^{\rho b]} \partial_\mu [e_{\theta d} \delta e_\rho^d] + e^{[a\rho} e^{\theta b]} \delta g_{\mu\rho,\theta}. \end{aligned}$$

Sabiendo así, que $f_{ab} = e^{[a\theta} e^{\rho b]} = f^{\theta\rho} = -f^{\rho\theta}$ podemos escribir

$$(A.19) \quad f_{ab} \delta\omega_\mu^{ab} \Big|_{LIF} = f^{\rho\theta} \partial_\mu [e_{\theta d} \delta e_\rho^d] + f^{\rho\theta} \delta g_{\mu\rho,\theta}.$$

Podemos promover ahora las derivadas parciales a derivadas covariantes, quedándonos

$$(A.20) \quad f_{ab} \delta\omega_\mu^{ab} = f^{\rho\theta} \nabla_\mu [e_{\theta d} \delta e_\rho^d] + f^{\rho\theta} \nabla_\theta \delta g_{\mu\rho}.$$

Teniendo en cuenta la relación simétrica (A.10) y dado que el primer término del miembro derecho de (A.20) depende solamente de la expresión antisimétrica $e_{[\theta d} \delta e_{\rho]}^d$ y no de $\delta g_{\mu\nu}$ podemos eliminar dicho término y escribir

$$(A.21) \quad f_{ab} \delta\omega_\mu^{ab} = f^{\rho\theta} \nabla_\theta \delta g_{\mu\rho}.$$

Con todo lo visto resulta finalmente

$$(A.22) \quad \frac{\delta\nabla_\mu}{\delta g_{\xi\rho}} \Psi = -\frac{i}{4} f^{\rho\theta} \nabla_\theta \delta_\mu^\xi \Psi.$$

Análogamente puede calcularse

$$(A.23) \quad \bar{\Psi} \frac{\delta \overleftarrow{\nabla}_\mu}{\delta g_{\xi\rho}} = \frac{i}{4} \bar{\Psi} f^{\rho\theta} \overleftarrow{\nabla}_\theta \delta_\mu^\xi.$$

A.3. Derivada funcional $\frac{\delta \mathcal{L}_\Psi}{\delta g_{\mu\nu}}$

Ahora podemos escribir la derivada funcional de $\mathcal{L}_\Psi^{(1)}$ en base a las relaciones ya obtenidas (A.13), (A.22) y (A.23)

$$\begin{aligned}
 (A.24) \quad \frac{\delta \mathcal{L}_\Psi^{(1)}}{\delta g_{\mu\nu}} &= \bar{\Psi} \frac{\delta \gamma^\rho}{\delta g_{\mu\nu}} \overleftarrow{\nabla}_\rho \gamma^\theta \nabla_\theta \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\rho \frac{\delta \overleftarrow{\nabla}_\rho}{\delta g_{\mu\nu}} \gamma^\theta \nabla_\theta \Psi + \\
 &\quad + \bar{\Psi} \gamma^\rho \overleftarrow{\nabla}_\rho \frac{\delta \gamma^\theta}{\delta g_{\mu\nu}} \nabla_\theta \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\rho \overleftarrow{\nabla}_\rho \gamma^\theta \frac{\delta \nabla_\theta}{\delta g_{\mu\nu}} \Psi = \\
 &= -\frac{1}{2} g^{(\mu\rho} \gamma^{\nu)} \bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}_\rho \gamma^\theta \nabla_\theta \Psi + \frac{i}{4} \gamma^\rho f^{\nu\theta} \bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}_\theta \delta_\rho^\mu \gamma^\xi \nabla_\xi \Psi - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\rho \overleftarrow{\nabla}_\rho g^{(\mu\theta} \gamma^{\nu)} \nabla_\theta \Psi - \frac{i}{4} \bar{\Psi} \gamma^\rho \overleftarrow{\nabla}_\rho \gamma^\theta f^{\nu\xi} \nabla_\xi \delta_\theta^\mu \Psi = \\
 &= -\frac{1}{2} \bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}^{(\mu} \gamma^{\nu)} \not{\nabla} \Psi - \frac{1}{2} \bar{\Psi} \overleftarrow{\not{\nabla}} \gamma^{(\mu} \nabla^{\nu)} \Psi + \\
 &\quad + \frac{i}{4} \left[\bar{\Psi} \gamma^\xi f^{\nu\rho} \delta_\xi^\mu \not{\nabla} \Psi - \bar{\Psi} \overleftarrow{\not{\nabla}} \gamma^\theta f^{\nu\rho} \delta_\theta^\mu \Psi \right].
 \end{aligned}$$

Con este resultado podemos escribir el tensor energía-impulso

$$(A.25) \quad T_\Psi^{(1)\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \mathcal{L}_\Psi^{(1)} + \bar{\Psi} \overleftarrow{\nabla}^{(\mu} \gamma^{\nu)} \not{\nabla} \Psi + \bar{\Psi} \overleftarrow{\not{\nabla}} \gamma^{(\mu} \nabla^{\nu)} \Psi + \nabla_\rho \mathcal{J}_{(1)}^{\mu\nu\rho},$$

y la corriente asociada

$$(A.26) \quad \mathcal{J}_{(1)}^{\mu\nu\rho} = -\frac{i}{2} \left[\bar{\Psi} \overleftarrow{\not{\nabla}} \gamma^{(\mu} f^{\nu)\rho} \Psi + \bar{\Psi} f^{\rho(\mu} \gamma^{\nu)} \not{\nabla} \Psi \right],$$

donde se han utilizado relaciones para las matrices γ del compendio (hep-ph/9507456 31 Jul 1995) y resultados de (cita). No calcularemos aquí la contribución $T_P^{\mu\nu}$, pero notaremos que en ciertos espacios y dadas ciertas simetrías en la solución, el término δP se anula para pequeños cambios, $\delta g_{\mu\nu}$. Para un cálculo explícito de $T_P^{\mu\nu}$ ver (Böhmer et al., 2010).

Apéndice B

Cuantización de las frecuencias cuasi-normales

Trabajaremos con la ecuación (4.37) para los modos de Dirac no masivos $\psi_{1,2}^{(\uparrow\downarrow)}$. El caso con $\kappa_{\uparrow} = (\ell + 1)$ representa $\psi_{1,2}^{(\uparrow)}$, (con $\ell = 0, 1, 2, \dots$), mientras que $\kappa_{\downarrow} = -\ell$ corresponde a $\psi_{1,2}^{(\downarrow)}$ (con $\ell = 1, 2, \dots$).

Aunque hay dos elecciones posibles para los potenciales (el segundo término exponencial del potencial puede tomar los signos $+$ ó $-$), la ecuación de Schrödinger en sí proviene de un problema que puede asimilarse a un potencial de Morse asociado a un Hamiltoniano SUSY. En símbolos

$$(B.1) \quad -\frac{d^2\psi_1^{(\uparrow\downarrow)}}{dv^2} + \{4(\kappa_{\uparrow\downarrow})^2 e^{-2v} + 2(\kappa_{\uparrow\downarrow})e^{-v} - 4a^2[E_n^{(1,\uparrow\downarrow)}]^2\}\psi_1^{(\uparrow\downarrow)} = 0,$$

$$(B.2) \quad -\frac{d^2\psi_2^{(\uparrow\downarrow)}}{dv^2} + \{4(\kappa_{\uparrow\downarrow})^2 e^{-2v} - 2(\kappa_{\uparrow\downarrow})e^{-v} - 4a^2[E_n^{(2,\uparrow\downarrow)}]^2\}\psi_2^{(\uparrow\downarrow)} = 0.$$

Así, tomaremos el camino seguido por Morse (Morse, 1929) para resolver nuestro problema. Primero, haremos un cambio de variables

$$(B.3) \quad y = e^{-v}, \quad \frac{d}{dv} = -y \frac{d}{dy}, \quad \frac{d^2}{dv^2} = y \frac{d}{dy} + y^2 \frac{d^2}{dy^2}.$$

Las ecuaciones resultantes tomarán la forma

$$(B.4) \quad \frac{d^2\psi_1^{(\uparrow\downarrow)}}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d\psi_1^{(\uparrow\downarrow)}}{dy} + \left\{ \frac{[\xi_n^{(1,\uparrow\downarrow)}]^2}{y^2} - \frac{2(\kappa_{\uparrow\downarrow})}{y} - 4(\kappa_{\uparrow\downarrow})^2 \right\} \psi_1^{(\uparrow\downarrow)} = 0,$$

$$(B.5) \quad \frac{d^2\psi_2^{(\uparrow\downarrow)}}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d\psi_2^{(\uparrow\downarrow)}}{dy} + \left\{ \frac{[\xi_n^{(2,\uparrow\downarrow)}]^2}{y^2} + \frac{2(\kappa_{\uparrow\downarrow})}{y} - 4(\kappa_{\uparrow\downarrow})^2 \right\} \psi_2^{(\uparrow\downarrow)} = 0,$$

donde los parámetros $4a^2[E_n^{(i,\uparrow\downarrow)}]^2$ han sido reemplazados por $[\xi_n^{(i,\uparrow\downarrow)}]^2$. Finalmente, una transformación apropiada de funciones nos aproxima a un problema con ecuaciones diferenciales hipergeométricas. Sea el conjunto de funciones $F_i^{(\uparrow\downarrow)}(y)$, tal que

$$(B.6) \quad \psi_1^{(\uparrow\downarrow)}(y) = e^{-\alpha y} (2\alpha y)^{\frac{\beta}{2}} F_1^{(\uparrow\downarrow)}(y),$$

$$(B.7) \quad \psi_2^{(\uparrow\downarrow)}(y) = e^{-\alpha y} (2\alpha y)^{\frac{\beta}{2}} F_2^{(\uparrow\downarrow)}(y).$$

Al mismo tiempo definimos la variable z como sigue:

$$(B.8) \quad z = 2\alpha y, \quad \frac{d}{dy} = 2\alpha \frac{d}{dz}, \quad \frac{d^2}{dy^2} = 4\alpha^2 \frac{d^2}{dz^2}.$$

Poniendo todo junto, llegamos a las expresiones finales, las cuales son casos particulares de las ecuaciones hipergeométricas confluentes generales (Abramowitz y Stegun, 1965)

$$\begin{aligned}
z \frac{d^2 F_1^{(\uparrow\downarrow)}}{dz^2} + (1 + \beta - z) \frac{dF_1^{(\uparrow\downarrow)}}{dz} \\
+ \left\{ \frac{4[\xi_1^{(\uparrow\downarrow)}]^2 + \beta^2}{4z} - \frac{2(\kappa_{\uparrow\downarrow}) + \alpha(\beta + 1)}{2\alpha} + \frac{\alpha^2 - 4(\kappa_{\uparrow\downarrow})^2}{4\alpha^2} z \right\} F_1^{(\uparrow\downarrow)} = 0, \\
z \frac{d^2 F_2^{(\uparrow\downarrow)}}{dz^2} + (1 + \beta - z) \frac{dF_2^{(\uparrow\downarrow)}}{dz} \\
+ \left\{ \frac{4[\xi_2^{(\uparrow\downarrow)}]^2 + \beta^2}{4z} + \frac{2(\kappa_{\uparrow\downarrow}) - \alpha(\beta + 1)}{2\alpha} + \frac{\alpha^2 - 4(\kappa_{\uparrow\downarrow})^2}{4\alpha^2} z \right\} F_2^{(\uparrow\downarrow)} = 0.
\end{aligned}$$

Bajo ciertas condiciones (que serán estudiadas luego), esas ecuaciones tienen la forma de una ecuación diferencial hipergeométrica confluyente

$$(B.9) \quad z \frac{d^2 F_{n\beta}(z)}{dz^2} + (1 + \beta - z) \frac{dF_{n\beta}(z)}{dz} + n F_{n\beta}(z) = 0.$$

La solución general puede expresarse en términos de funciones de Laguerre generalizadas $L(n, \beta, z)$

$$(B.10) \quad F_{n\beta}(z) = A_{n\beta} L(n, \beta, z) + B_{n\beta} \left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(-n)} \frac{L(n + \beta, -\beta, z)}{\text{Bin}(n, \beta) z^\beta} + \frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(-n - \beta)} \frac{L(n, \beta, z)}{\text{Bin}(n + \beta, n)} \right],$$

donde $\text{Bin}(n, \beta) = n! / [\beta!(n - \beta)!]$.

Cualesquiera sean el resto de los argumentos, si n resulta un entero positivo, la solución siempre se podrá escribir en la forma de un polinomio. Este tratamiento de las soluciones es particularmente útil para la representación de los estados. El estado fundamental, con $n = 0$, usará el hecho que $F_{0\beta} = \text{constante}$ en los potenciales atractivos. Hay cuatro casos significativos de interés, los que estudiaremos por separado.

B.1. El caso con $\kappa_{\uparrow} = \ell + 1$ y $F_1^{(\uparrow)}$.

El primer caso es

$$(B.11) \quad 4[\xi_n^{(1,\uparrow)}]^2 + \beta^2 = 0,$$

$$(B.12) \quad -\frac{2(\kappa_{\uparrow}) + \alpha(\beta + 1)}{2\alpha} = n,$$

$$(B.13) \quad \alpha^2 - 4(\kappa_{\uparrow})^2 = 0.$$

Un factor con decaimiento exponencial en (B.6) nos fuerza a definir $\alpha = 2(\ell + 1)$; entonces obtenemos $\beta = -2(n + 1)$. Finalmente $\xi_n^{(1,\uparrow)} = i \frac{\beta}{2} = -i(n + 1)$. La elección del menos en el signo de ξ se debe a razones energéticas

$$(B.14) \quad E_n^{(1,\uparrow)} = \frac{\xi_n^{(1,\uparrow)}}{2a} = -i \frac{(n + 1)}{2a}.$$

La energía debe tener una parte imaginaria negativa para recuperar los modos cuasi-normales salientes. Téngase en cuenta que n debe ser un entero positivo y debido a que $\beta = -2(n + 1) < 0$, se obtiene $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

B.2. El caso con $\kappa_{\uparrow} = \ell + 1$ y $F_2^{(\uparrow)}$.

En este caso

$$(B.15) \quad 4 \left[\xi_n^{(2,\uparrow)} \right]^2 + \beta^2 = 0,$$

$$(B.16) \quad \frac{2(\kappa_{\uparrow}) - \alpha(\beta + 1)}{2\alpha} = n',$$

$$(B.17) \quad \alpha^2 - 4(\kappa_{\uparrow})^2 = 0.$$

Usando argumentos similares, pero con (B.7), obtenemos $\alpha = 2(\ell + 1)$, $\beta = -2n'$ y $\xi_n^{(2,\uparrow)} = i\frac{\beta}{2} = -in'$. Nuevamente n' debe ser un entero positivo.

$$(B.18) \quad E_{n'}^{(2,\uparrow)} = \frac{\xi_{n'}^{(2,\uparrow)}}{2a} = -i\frac{n'}{2a}.$$

Usando el hecho que $\beta = -2n' < 0$, obtenemos ahora $n' = 1, 2, 3, \dots$, de forma que $n = n' - 1$, y las energías (B.18) pueden escribirse

$$(B.19) \quad E_n^{(2,\uparrow)} = E_n^{(1,\uparrow)} = -i\frac{(n+1)}{2a},$$

donde $n = 0, 1, \dots$

B.3. El caso con $\kappa_{\downarrow} = -\ell$ y $F_1^{(\downarrow)}$.

Sólo los resultados principales son de interés; $\alpha = 2\ell$, $\beta = -2m$ y $\xi_m^{(1,\downarrow)} = i\frac{\beta}{2} = -im$, con m entero positivo. La energía en este caso será

$$(B.20) \quad E_m^{(1,\downarrow)} = \frac{\xi_m^{(1,\downarrow)}}{2a} = -i\frac{m}{2a},$$

donde $m = 1, 2, \dots$

B.4. El caso con $\kappa_{\downarrow} = -\ell$ y $F_2^{(\downarrow)}$

En este último caso $\alpha = 2\ell$, $\beta = -2(m' + 1)$ y $\xi_{m'}^{(2,\downarrow)} = i\frac{\beta}{2} = -i(m' + 1)$, con m' entero positivo. La energía resulta ser

$$(B.21) \quad E_{m'}^{(2,\downarrow)} = \frac{\xi_{m'}^{(2,\downarrow)}}{2a} = -i\frac{(m' + 1)}{2a}.$$

Un análisis similar al hecho en (B.1) y (B.2), da $m' = m - 1$ y finalmente encontramos que los valores de energía (o frecuencias cuasi-normales) tienen un resultado único que aquí reetiquetamos $m \rightarrow n$

$$(B.22) \quad E_n^{(1,\downarrow)} = E_n^{(2,\downarrow)} = -i\frac{n}{2a},$$

donde $n = 1, 2, \dots$

Bibliografía

*Y así, del mucho leer y del poco dormir, se le secó
el cerebro de manera que vino a perder el juicio.*

Miguel de Cervantes Saavedra

- ABRAMOWITZ, M. y STEGUN, I. *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1965.
- ADE, P. A. R., AGHANIM, N., ALVES, M. I. R., ARMITAGE-CAPLAN, C., ARNAUD, M., ASHDOWN, M., ATRIO-BARANDELA, F., AUMONT, J., AUSSEL, H. y PLANCK COLLABORATION TEAM. Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results. *arXiv:1303.5062*, Disponible en <http://arxiv.org/abs/1303.5062>.
- AHLUWALIA-KHALILOVA, D. V. y GRUMILLER, D. Dark matter: A spin one-half fermion field with mass dimension one? *Physical Review D*, vol. 72(6), página 067701, 2005a.
- AHLUWALIA-KHALILOVA, D. V. y GRUMILLER, D. Spin-half fermions with mass dimension one: theory, phenomenology, and dark matter. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2005(7), página 012, 2005b.
- AHLUWALIA-KHALILOVA, D. V., LEE, C.-Y. y SCHRITT, D. ELKO as self-interacting fermionic dark matter with axis of locality. *Physics Letters B*, vol. 687(2-3), páginas 248–252, 2010.
- AMIRHASHCHI, H. y PRADHAN, A. Viscous dark energy and phantom field in an anisotropic universe. *Astrophysics and Space Science*, vol. 351(1), páginas 59–65, 2014.
- AN, F. P. y DAYA BAY REACTOR NEUTRINO COLLABORATION GROUP. Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya Bay. *Physical Review Letters*, vol. 108(17), página 171803, 2012.
- ANABITARTE, M. y BELLINI, M. Space-time matter inflation. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 47(4), página 042502, 2006.
- ANDERSSON, N. y HOWLS, C. The asymptotic quasinormal mode spectrum of non-rotating black holes. *Classical and Quantum Gravity*, vol. 21(6), páginas 1623–1642, 2004.
- ANTONIADIS, I., ARKANI-HAMED, N., DIMOPOULOS, S. y DVALI, G. New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV. *Physics Letters B*, vol. 436(3-4), páginas 257–263, 1998.
- ARGYRES, P., DIMOPOULOS, S. y MARCH-RUSSELL, J. Black holes and sub-millimeter dimensions. *Physics Letters B*, vol. 441(1-4), páginas 96–104, 1998.
- ARINGAZIN, A. K. y MIKHAILOV, A. L. Matter fields in spacetime with vector nonmetricity. *Classical and Quantum Gravity*, vol. 8(9), página 1685, 1991.

- ARKANI-HAMED, N., CACHAZO, F., CHEUNG, C. y KAPLAN, J. The S-matrix in twistor space. *Journal of High Energy Physics*, vol. 2010(3), 2010.
- ARKANI-HAMED, N., CHENG, H.-C., LUTY, M. A. y MUKOHYAMA, S. Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity. *Journal of High Energy Physics*, vol. 2004(05), página 074, 2004.
- ARKANI-HAMED, N., DIMOPOULOS, S. y DVALI, G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Physics Letters B*, vol. 429(3-4), páginas 263–272, 1998.
- ARKANI-HAMED, N., GROSSMAN, Y. y SCHMALTZ, M. Split fermions in extra dimensions and exponentially small cross sections at future colliders. *Physical Review D*, vol. 61(11), página 115004, 2000.
- ARKANI-HAMED, N. y SCHMALTZ, M. Hierarchies without symmetries from extra dimensions. *Physical Review D*, vol. 61(3), página 033005, 2000.
- BALAGUERA-ANTOLÍNEZ, A., MOTA, D. F. y NOWAKOWSKI, M. Ellipsoidal configurations in the de Sitter spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, vol. 23(13), página 4497, 2006.
- BALL, J. L., FUENTES-SCHULLER, I. y SCHULLER, F. P. Entanglement in an expanding spacetime. *Physics Letters A*, vol. 359(6), páginas 550–554, 2006.
- BARDEEN, J. M., CARTER, B. y HAWKING, S. W. The four laws of black hole mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, vol. 31(2), páginas 161–170, 1973.
- BARDUCCI, A., CASALBUONI, R. y LUSANNA, L. Classical spinning particles interacting with external gravitational fields. *Nuclear Physics B*, vol. 124(4), páginas 521–538, 1977.
- BARTNIK, R. y MCKINNON, J. Particlelike solutions of the Einstein-Yang-Mills equations. *Physical Review Letters*, vol. 61(2), páginas 141–144, 1988.
- BATIC, D. y NOWAKOWSKI, M. On the bound states of the Dirac equation in the extreme Kerr metric. *Classical and Quantum Gravity*, vol. 25(22), página 225022, 2008.
- BATTYE, R. A. y MOSS, A. Evidence for massive neutrinos from cosmic microwave background and lensing observations. *Physical Review Letters*, vol. 112(5), página 051303, 2014.
- BELLINI, M. De Sitter inflationary expansion from a noncompact {KK} theory: A nonperturbative quantum (scalar) field formalism. *Physics Letters B*, vol. 609(3-4), páginas 187–193, 2005.
- BELLINI, M. Decaying cosmological parameter in the early universe from NKK theory of gravity. *Physics Letters B*, vol. 632(5-6), páginas 610–616, 2006.
- BELLINI, M., CASINI, H., MONTEMAYOR, R. y SISTERNA, P. Stochastic approach to inflation: Classicality conditions. *Physical Review D*, vol. 54(12), páginas 7172–7180, 1996.
- BELLINI, M. y SISTERNA, P. Universo inflacionario: Soluciones estacionarias exactas de la ecuación de Starobinsky. *Revista Mexicana de Física*, vol. 42(1), páginas 24–32, 1995.
- BENDER, C. M. y ORSZAG, S. A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers: Asymptotic Methods and Perturbation Theory (Vol. 1)*. Springer, 1999.
- BERESTETSKII, V., LIFSHITZ, E. y PITAEVSKII, L. *Relativistic Quantum Theory. Vol. 4*. Pergamon Press, primera edición, 1971.

- BERRY, M. V. y MOUNT, K. E. Semiclassical approximations in wave mechanics. *Reports on Progress in Physics*, vol. 35(1), página 315, 1972.
- BEYER, H. On the stability of the Kerr metric. *Communications in Mathematical Physics*, vol. 221(3), páginas 659–676, 2001.
- BÖHMER, C. G. The Einstein-Cartan-ELKO system. *Annalen der Physik*, vol. 16(1), páginas 38–44, 2007a.
- BÖHMER, C. G. The Einstein-ELKO system - can dark matter drive inflation? *Annalen der Physik*, vol. 16(5-6), páginas 325–341, 2007b.
- BÖHMER, C. G. Dark spinor inflation: Theory primer and dynamics. *Physical Review D*, vol. 77(12), página 123535, 2008.
- BÖHMER, C. G. y BURNETT, J. Dark spinors with torsion in cosmology. *Physical Review D*, vol. 78(10), página 104001, 2008.
- BÖHMER, C. G. y BURNETT, J. Dark spinors. *The Twelfth Marcel Grossmann Meeting*, vol. 335, páginas 1826–1828, 2009.
- BÖHMER, C. G. y BURNETT, J. Dark energy with dark spinors. *Modern Physics Letters A*, vol. 25(2), páginas 101–110, 2010.
- BÖHMER, C. G. y MOTA, D. F. CMB anisotropies and inflation from non-standard spinors. *Physics Letters B*, vol. 663(3), páginas 168–171, 2008.
- BÖHMER, G., BOURNETT, J., MOTA, D. F. y SHAW, D. J. Dark spinor models in gravitation and cosmology. *Journal of High Energy Physics*, vol. 2010(7-53), 2010.
- BIZON, P. Colored black holes. *Physical Review Letters*, vol. 64(24), páginas 2844–2847, 1990.
- BJÆLDE, O. E., BROOKFIELD, A. W., VAN DE BRUCK, C., HANNESTAD, S., MOTA, D. F., SCHREMPP, L. y TOCCHINI-VALENTINI, D. Neutrino dark energy - revisiting the stability issue. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2008(01), página 026, 2008.
- BOURLIOT, F., FERREIRA, P. G., MOTA, D. F. y SKORDIS, C. Cosmological behavior of Bekenstein's modified theory of gravity. *Physical Review D*, vol. 75(6), página 063508, 2007.
- BREITENLOHNER, P., FORGÁCS, P. y MAISON, D. Static spherically symmetric solutions of the Einstein-Yang-Mills equations. *Communications in Mathematical Physics*, vol. 163(1), páginas 141–172, 1994.
- BRILL, D. y WHEELER, J. Interaction of neutrinos and gravitational fields. *Reviews of Modern Physics*, vol. 29(3), páginas 465–479, 1957.
- BUNCH, T. S. y DAVIES, P. C. W. Quantum field theory in de Sitter space: renormalization by point-splitting. *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 360(1700), páginas 117–134, 1978.
- BURSTIN, C. Ein beitrag zum problem der einbettung der riemannschen räume in euklidischen räumen. *Matematicheskii Sbornik*, vol. 38(3-4), páginas 74–85, 1931.
- BURTON, H. y MANN, R. B. Palatini variational principle for an extended Einstein-Hilbert action. *Physical Review D*, vol. 57(8), páginas 4754–4759, 1998.
- CAMPBELL, J. E. *A Course Of Differential Geometry*. Clarendon Press, Oxford, 1926.
- CAMPORESI, R. y HIGUCHI, A. On the eigenfunctions of the Dirac operator on spheres and real hyperbolic spaces. *Journal of Geometry and Physics*, vol. 20(1), páginas 1–18, 1996.

- CARMELI, M. y MALIN, S. *Theory of Spinors: An Introduction*. World Scientific Publishing Company, 2000.
- CARROLL, S. M., DUVVURI, V., TRODDEN, M. y TURNER, M. S. Is cosmic speed-up due to new gravitational physics? *Physical Review D*, vol. 70(4), página 043528, 2004.
- CASINI, H., MONTEMAYOR, R. y SISTERNA, P. Stochastic approach to inflation. II. Classicality, coarse graining, and noises. *Physical Review D*, vol. 59(6), página 063512, 1999.
- CHAMBLIN, A. Capture of bulk geodesics by brane-world black holes. *Classical and Quantum Gravity*, vol. 18(3), página L17, 2001.
- CHANDRASEKHAR, S. *The mathematical theory of black holes*. Oxford University Press, 1983.
- CHO, H. T. Dirac quasinormal modes in Schwarzschild black hole spacetimes. *Physical Review D*, vol. 68(024003), 2003.
- CHO, H. T. Asymptotic quasinormal frequencies of different spin fields in spherically symmetric black holes. *Physical Review D*, vol. 73(024019), 2006.
- CHO, H. T., CORNELL, A., DOUKAS, J. y NAYLOR, W. Split fermion quasinormal modes. *Physical Review D*, vol. 75(10), página 104005, 2007.
- CHO, H. T. y HO, C.-L. Quasi-exactly solvable quasinormal modes. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 40(6), página 1325, 2007.
- CHO, H. T. y LIN, Y.-H. WKB analysis of the scattering of massive Dirac fields in Schwarzschild black-hole spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, vol. 22(5), página 775, 2005.
- COHEN, A. G., GLASHOW, S. L. y LIGETI, Z. Disentangling neutrino oscillations. *Physics Letters B*, vol. 678(2), páginas 191–196, 2009.
- COPELAND, E. J., KOLB, E. W., LIDDLE, A. R. y LIDSEY, J. E. Reconstructing the inflaton potential: In principle and in practice. *Physical Review D*, vol. 48(6), páginas 2529–2547, 1993.
- COPELAND, E. J., SAMI, M. y TSUJIKAWA, S. Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, vol. 15(11), páginas 1753–1935, 2006.
- COUGHLAN, G., FISCHLER, W., KOLB, E. W., RABY, S. y ROSS, G. Cosmological problems for the polonyi potential. *Physics Letters B*, vol. 131(1-3), páginas 59–64, 1983.
- CREMMER, E., FERRARA, S., GIRARDELLO, L. y PROEYEN, A. V. Yang-mills theories with local supersymmetry: Lagrangian, transformation laws and super-Higgs effect. *Nuclear Physics B*, vol. 212(3), páginas 413–442, 1983.
- DA ROCHA, R. y HOFF DA SILVA, J. M. ELKO spinor fields: Lagrangians for gravity derived from supergravity. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 6(3), páginas 461–477, 2009.
- DA ROCHA, R. y HOFF DA SILVA, J. M. ELKO, flagpole and flag-dipole spinor fields, and the instanton Hopf fibration. *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 20(3-4), páginas 847–870, 2010.
- DA ROCHA, R. y RODRIGUES, W. A. Where are ELKO spinor fields in Lounesto spinor field classification? *Modern Physics Letters A*, vol. 21(1), páginas 65–74, 2006.
- DAHIA, F. y ROMERO, C. The embedding of space-times in five dimensions with nondegenerate ricci tensor. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 43(6), páginas 3097–3106, 2002a.

- DAHIA, F. y ROMERO, C. The embedding of the space-time in five dimensions: An extension of the Campbell-Magaard theorem. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 43(11), páginas 5804–5814, 2002b.
- DAHIA, F. y ROMERO, C. Dynamically generated embeddings of spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, vol. 22(23), página 5005, 2005.
- DAVIS, T. ET AL. Scrutinizing exotic cosmological models using essence supernova data combined with other cosmological probes. *The Astrophysical Journal*, vol. 666(2), páginas 716–725, 2007.
- DIMOPOULOS, S. y LANDSBERG, G. Black holes at the large hadron collider. *Physical Review Letters*, vol. 87(16), página 161602, 2001.
- DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, vol. 117(778), páginas 610–624, 1928.
- EIDELMAN, S. ET AL. Review of particle physics. *Physics Letters B*, vol. 592(1-4), páginas 1–5, 2004.
- FABBRI, L. Causal propagation for ELKO fields. *Modern Physics Letters A*, vol. 25(3), páginas 151–157, 2010.
- FEINSTEIN, A. Power-law inflation from the rolling tachyon. *Physical Review D*, vol. 66(6), página 063511, 2002.
- FERBER, A. Supertwistors and conformal supersymmetry. *Nuclear Physics B*, vol. 132(1-2), páginas 55–64, 1978.
- FOCK, V. Geometrization of Dirac's theory of the electron. *Zeitschrift für Physik*, vol. 57(3-4), páginas 261–277, 1929.
- FOCK, V. y IWANENKO, D. Géometrie quantique linéaire et déplacement parallèle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris)*, vol. 188, páginas 1470–1472, 1929.
- FOGLI, G. L., LISI, E., MARRONE, A., MONTANINO, D., PALAZZO, A. y ROTUNNO, A. M. Global analysis of neutrino masses, mixings, and phases: Entering the era of leptonic CP violation searches. *Physical Review D*, vol. 86(1), página 013012, 2012.
- FORD, L. H. Inflation driven by a vector field. *Physical Review D*, vol. 40(4), páginas 967–972, 1989.
- FUTTERMAN, J. A. H., HANDLER, F. A. y MATZNER, A. *Scattering from Black Holes*. Cambridge University Press, primera edición, 2009.
- GIDDINGS, S. y THOMAS, S. High energy colliders as black hole factories: The end of short distance physics. *Physical Review D*, vol. 65(5), página 056010, 2002.
- GONZALEZ-GARCIA, M. C. y NIR, Y. Neutrino masses and mixing: evidence and implications. *Reviews of Modern Physics*, vol. 75(2), páginas 345–402, 2003.
- GONZÁLEZ-LÓPEZ, A., KAMRAN, N. y OLVER, P. Normalizability of one-dimensional quasi-exactly solvable Schrödinger operators. *Communications in Mathematical Physics*, vol. 153(1), páginas 117–146, 1993.
- GREDAT, D. y SHANKARANARAYANAN, S. Modified scalar and tensor spectra in spinor driven inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2010(1), página 008, 2010.

- GROVES, P. B., ANDERSON, P. R. y CARLSON, E. D. Method to compute the stress-energy tensor for the massless spin $\frac{1}{2}$ field in a general static spherically symmetric spacetime. *Physical Review D*, vol. 66(12), página 124017, 2002.
- GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, vol. 23(2), páginas 347–356, 1981.
- HABIB, S. Stochastic inflation: Quantum phase-space approach. *Physical Review D*, vol. 46(6), páginas 2408–2427, 1992.
- HAN, T., KRIBS, G. y MCEL RATH, B. Black hole evaporation with separated fermions. *Physical Review Letters*, vol. 90(3), página 031601, 2003.
- HEHL, F. W. y DATTA, B. K. Nonlinear spinor equation and asymmetric connection in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 12(7), páginas 1334–1339, 1971.
- HEHL, F. W., VON DER HEYDE, P., KERLICK, G. D. y NESTER, J. M. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Reviews of Modern Physics*, vol. 48(3), páginas 393–416, 1976.
- HILBERT, D. The foundations of physics (first communication). En *The Genesis of General Relativity* (editado por M. Janssen, J. D. Norton, J. Renn, T. Sauer y J. Stachel), vol. 250 de *Boston Studies in the Philosophy of Science*, páginas 1925–1938. Springer Netherlands, 2007.
- HLADIK, J. *Spinors in Physics*. Springer, primera edición, 1999.
- HOFF DA SILVA, J. M. y DA ROCHA, R. From Dirac action to ELKO action. *International Journal of Modern Physics A*, vol. 24(16n17), páginas 3227–3242, 2009.
- IYER, S. y WILL, C. Black-hole normal modes: A WKB approach. I. Foundations and application of a higher-order WKB analysis of potential-barrier scattering. *Physical Review D*, vol. 35(12), páginas 3621–3631, 1987.
- JAFFE, A. H. ET AL. Cosmology from MAXIMA-1, BOOMERANG, and COBE DMR cosmic microwave background observations. *Physical Review Letters*, vol. 86(16), páginas 3475–3479, 2001.
- KALUZA, T. Zum unitätsproblem in der physik. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, vol. 33(Phys.Mat. K1), página 996, 1921.
- KLEIN, O. The atomicity of electricity as a quantum theory law. *Nature*, vol. 118, página 516, 1926a.
- KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik A*, vol. 37(12), páginas 895–906, 1926b.
- KÜNZLE, H. P. y MASOOD-UL-ALAM, A. Spherically symmetric static SU(2) Einstein-Yang-Mills fields. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 31(4), páginas 928–935, 1990.
- KOFMAN, L., LINDE, A. y STAROBINSKY, A. A. Reheating after inflation. *Physical Review Letters*, vol. 73(24), páginas 3195–3198, 1994.
- KOIVISTO, T. y MOTA, D. F. Anisotropic dark energy: dynamics of the background and perturbations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2008(06), página 018, 2008a.
- KOIVISTO, T. y MOTA, D. F. Vector field models of inflation and dark energy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2008(8), página 21, 2008b.

- KOKKOTAS, K. D. y SCHMIDT, B. G. Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Reviews in Relativity*, vol. 2(2), 1999.
- KOMATSU, E., SMITH, K. M., DUNKLEY, J., BENNETT, C. L., GOLD, B., HINSHAW, G., JAROSIK, N., LARSON, D., NOLTA, M. R., PAGE, L., SPERGEL, D. N., HALPERN, M., HILL, R. S., KOGUT, A., LIMON, M., MEYER, S. S., ODEGARD, N., TUCKER, G. S., WEILAND, J. L., WOLLACK, E. y WRIGHT, E. L. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Cosmological interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 192(2), página 18, 2011.
- KONOPLYA, R. Quasinormal behavior of the d-dimensional Schwarzschild black hole and the higher order WKB approach. *Physical Review D*, vol. 68(2), página 024018, 2003.
- KRAUSS, L. M. New constraints on “ino” masses from cosmology (I). Supersymmetric “inos”. *Nuclear Physics B*, vol. 227(3), páginas 556–569, 1983.
- LEDESMA, D. S. y BELLINI, M. Single field inflationary models with non-compact Kaluza-Klein theory. *Physics Letters B*, vol. 581(1-2), páginas 1–8, 2004.
- LEE, T. H. Some cosmological solutions of 5D Einstein equations with dark spinor condensate. *Physics Letters B*, vol. 712(1-2), páginas 6–9, 2012.
- LESGOURGUES, J. y PASTOR, S. Massive neutrinos and cosmology. *Physics Reports*, vol. 429(6), páginas 307–379, 2006.
- LI, B., BARROW, J. D. y MOTA, D. F. Cosmology of modified Gauss-Bonnet gravity. *Physical Review D*, vol. 76(4), página 044027, 2007.
- LIGUORI, M., MATARRESE, S., MUSSO, M. A. y RIOTTO, A. Stochastic inflation and the lower multipoles in the cosmic microwave background anisotropies. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2004(08), página 011, 2004.
- LINDE, A. Chaotic inflation. *Physics Letters B*, vol. 129(3-4), páginas 177–181, 1983.
- LINEWEAVER, C. H. The cosmic microwave background and observational convergence in the $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ plane. *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 505(2), página L69, 1998.
- LORD, E. A. *Tensors, relativity and cosmology*. Tata McGraw-Hill, 1976.
- LYTH, D. H. y RIOTTO, A. Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation. *Physics Reports*, vol. 314(1-2), páginas 1–146, 1999.
- MAARTENS, R. Cosmological dynamics on the brane. *Physical Review D*, vol. 62(8), página 084023, 2000.
- MADRIZ AGUILAR, J. E. y BELLINI, M. The evolution of the universe from non-compact Kaluza-Klein theory. *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, vol. 38(3), páginas 367–371, 2004a.
- MADRIZ AGUILAR, J. E. y BELLINI, M. Noncompact Kaluza-Klein theory and inflationary cosmology: a complete formalism. *Physics Letters B*, vol. 596(1-2), páginas 116–122, 2004b.
- MADRIZ AGUILAR, J. E. y BELLINI, M. Noncompact {KK} theory of gravity: Stochastic treatment for a nonperturbative inflaton field in a de Sitter expansion. *Physics Letters B*, vol. 619(3-4), páginas 208–218, 2005.

- MADRIZ AGUILAR, J. E. y BELLINI, M. Extended general relativity: Large-scale antigravity and short-scale gravity with $\omega = -1$ from five-dimensional vacuum. *Physics Letters B*, vol. 679(4), páginas 306–310, 2009.
- MAGAARD, L. *Zur Einbettung Riemannscher Räume in Einstein-Räume und konform-euklidische Räume*. PhD, University of Kiel, 1963.
- MASHHOON, B., LIU, H. y WESSON, P. S. Particle masses and the cosmological constant in Kaluza-Klein theory. *Physics Letters B*, vol. 331(3-4), páginas 305–312, 1994.
- MASHHOON, B. y WESSON, P. S. Gauge-dependent cosmological ‘constant’. *Classical and Quantum Gravity*, vol. 21(14), página 3611, 2004.
- MAZUMDAR, A. y ROCHER, J. Particle physics models of inflation and curvaton scenarios. *Physics Reports*, vol. 497(4-5), páginas 85–215, 2011.
- MCMANUS, D. J. Five-dimensional cosmological models in induced matter theory. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 35(9), páginas 4889–4896, 1994.
- MIELNIK, B. Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 25(12), páginas 3387–3389, 1984.
- MIJIĆ, M. Stochastic dynamics of coarse-grained quantum fields in the inflationary universe. *Physical Review D*, vol. 49(12), páginas 6434–6441, 1994.
- MORSE, P. Diatomic molecules according to the wave mechanics. II. Vibrational levels. *Physical Review*, vol. 34(1), páginas 57–64, 1929.
- MOTA, D. F., PETTORINO, V., ROBBERS, G. y WETTERICH, C. Neutrino clustering in growing neutrino quintessence. *Physics Letters B*, vol. 663(3), páginas 160–164, 2008.
- NAKAMURA, K. y PARTICLE DATA GROUP. Review of particle physics. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 37(7A), página 075021, 2010.
- NATARIO, J. y SCHIAPPA, R. On the classification of asymptotic quasinormal frequencies for d-dimensional black holes and quantum gravity. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 8(6), páginas 1001–1131, 2004.
- NOGAMI, Y. y TOYAMA, F. Supersymmetry aspects of the Dirac equation in one dimension with a Lorentz scalar potential. *Physical Review A*, vol. 47(3), páginas 1708–1714, 1993.
- NOJIRI, S. y ODINTSOV, S. D. Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration. *Physical Review D*, vol. 68(12), página 123512, 2003.
- OVERDUIN, J. M. Nonsingular models with a variable cosmological term. *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 517(1), página L1, 1999.
- OVERDUIN, J. M. y WESSON, P. S. Kaluza-Klein gravity. *Physics Reports*, vol. 283(5-6), páginas 303–378, 1997.
- PADMANABHAN, T. Cosmological constant-the weight of the vacuum. *Physics Reports*, vol. 380(5-6), páginas 235–320, 2003.
- PALATINI, A. Sui fondamenti del calcolo differenziale assoluto. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 43(1), páginas 192–202, 1919.

- PENROSE, R. Twistor algebra. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 8(2), páginas 345–366, 1967.
- PENROSE, R. Twistor quantisation and curved space-time. *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 1(1), páginas 61–99, 1968.
- PENROSE, R. Solutions of the zero-rest-mass equations. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 10(1), páginas 38–39, 1969.
- PENROSE, R. The twistor programme. *Reports on Mathematical Physics*, vol. 12(1), páginas 65–76, 1977.
- PENROSE, R. The central programme of twistor theory. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 10(2-3), páginas 581–611, 1999.
- PERLMUTTER, S. Supernovae, dark energy, and the accelerating universe. *Physics Today*, vol. 56(4), páginas 53–60, 2003.
- PONCE DE LEÓN, J. Cosmological models in a Kaluza-Klein theory with variable rest mass. *General Relativity and Gravitation*, vol. 20(6), páginas 539–550, 1988.
- PONCE DE LEÓN, J. Does the force from an extra dimension contradict physics in 4D? *Physics Letters B*, vol. 523(3-4), páginas 311–316, 2001a.
- PONCE DE LEÓN, J. Equivalence between space-time-matter and brane-world theories. *Modern Physics Letters A*, vol. 16(35), páginas 2291–2303, 2001b.
- PONCE DE LEÓN, J. The effective energy-momentum tensor in Kaluza-Klein gravity with large extra dimensions and off-diagonal metrics. *International Journal of Modern Physics D*, vol. 11(9), páginas 1355–1380, 2002.
- PONCE DE LEÓN, J. Extra force from an extra dimension: Comparison between brane theory, space-time-matter theory, and other approaches. *General Relativity and Gravitation*, vol. 36(6), páginas 1335–1360, 2004.
- POPLAWSKI, N. J. Covariant differentiation of spinors for a general affine connection. *arXiv:0710.3982*, Disponible en <http://arxiv.org/abs/0710.3982v2>.
- POPLAWSKI, N. J. Nonsingular Dirac particles in spacetime with torsion. *Physics Letters B*, vol. 690(1), páginas 73–77, 2010.
- RANDALL, L. y SUNDRUM, R. An alternative to compactification. *Physical Review Letters*, vol. 83(23), páginas 4690–4693, 1999.
- RIPPL, S., ROMERO, C. y TAVAKOL, R. D-dimensional gravity from (D+1)-dimensions. *Classical and Quantum Gravity*, vol. 12(10), página 2411, 1995.
- ROWAN, S. y HOUGH, J. Gravitational wave detection by interferometry (ground and space). *Living Reviews in Relativity*, vol. 3(3), 2000.
- SAHNI, V. Dark matter and dark energy. *Lecture Notes in Physics*, vol. 653, páginas 141–180, 2004.
- SAMI, M. Implementing power law inflation with tachyon rolling on the brane. *Modern Physics Letters A*, vol. 18(10), páginas 691–697, 2003.
- SCHERRER, R. J. y SEN, A. Phantom dark energy models with a nearly flat potential. *Physical Review D*, vol. 78(6), página 067303, 2008.

- SCHUTZ, B. y WILL, C. Black hole normal modes: A semianalytic approach. *The Astrophysical Journal*, vol. 291, páginas L33–L36, 1985.
- SEAHRA, S. S. y WESSON, P. S. Null geodesics in five-dimensional manifolds. *General Relativity and Gravitation*, vol. 33(10), páginas 1731–1752, 2001.
- SHANKARANARAYANAN, S. Dark spinor driven inflation. *The Twelfth Marcel Grossmann Meeting*, vol. 179, páginas 1237–1240, 2009a.
- SHANKARANARAYANAN, S. What if the inflaton is a spinor condensate? *International Journal of Modern Physics D*, vol. 18(14), páginas 2173–2179, 2009b.
- SHISHKIN, G. V. y VILLALBA, V. M. Dirac equation in external vector fields: Separation of variables. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 30(9), páginas 2132–2142, 1989.
- SHU, F.-W. y SHEN, Y.-G. Quasinormal modes of charged black holes in string theory. *Physical Review D*, vol. 70(8), página 084046, 2004.
- SMOLLER, J. y WASSERMAN, A. Existence of infinitely many smooth, static, global solutions of the Einstein-Yang-Mills equations. *Communications in Mathematical Physics*, vol. 151(2), páginas 303–325, 1993.
- SMOOT, G. F., BENNETT, C. L., KOGUT, A., WRIGHT, E. L., AYMEN, J., BOGGESS, N. W., CHENG, E. S., DE AMICI, G., GULKIS, S., HAUSER, M. G., HINSHAW, G., JACKSON, P. D., JANSSEN, M., KAITA, E., KELSALL, T., KEEGSTRA, P., LINEWEAVER, C., LOEWENSTEIN, K., LUBIN, P., MATHER, J., MEYER, S. S., MOSELEY, S. H., MURDOCK, T., ROKKE, L., SILVERBERG, R. F., TENORIO, L., WEISS, R. y WILKINSON, D. T. Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. *Astrophysical Journal Letters*, vol. 396(1), páginas L1–L5, 1992.
- SÁNCHEZ, P. A., ANABITARTE, M. y BELLINI, M. Dirac equation for massive neutrinos in a Schwarzschild-de Sitter spacetime from a 5D vacuum. *Physics Letters B*, vol. 705(5), páginas 535–538, 2011a.
- SÁNCHEZ, P. A. y BELLINI, M. Inflationary dark energy from a condensate of spinors in a 5D vacuum. *International Journal of Modern Physics D*, vol. 22(12), páginas 1–6, 2013.
- SÁNCHEZ, P. A., ROMERO, J. M. y BELLINI, M. Analytical treatment of SUSY quasi-normal modes in a non-rotating Schwarzschild black hole. *The European Physical Journal C*, vol. 71(1), página 1526, 2011b.
- SNYGG, J. *Clifford Algebra: A Computational Tool for Physicists*. Oxford University Press, 1997.
- SPIVAK, M. *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. 5. Publish or Perish, segunda edición, 1979.
- STRAUMANN, N. y ZHOU, Z. Instability of the Bartnik-McKinnon solution of the Einstein-Yang-Mills equations. *Physics Letters B*, vol. 237(3-4), páginas 353–356, 1990.
- TURBINER, A. Quasi-exactly-solvable problems and $sl(2)$ algebra. *Communications in Mathematical Physics*, vol. 118(3), páginas 467–474, 1988.
- TURBINER, A. y USHVERIDZE, A. Spectral singularities and quasi-exactly solvable quantal problem. *Physics Letters A*, vol. 126(3), páginas 181–183, 1987.
- UNRUH, W. G. Absorption cross section of small black holes. *Physical Review D*, vol. 14(12), páginas 3251–3259, 1976.

- VALLE, J. W. F. Neutrino physics overview. *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 53(1), página 473, 2006.
- WALD, R. M. *General Relativity*. University of Chicago Press, primera edición, 1984.
- WATANABE, T. Dirac-field model of inflation in Einstein-Cartan theory. *arXiv:0902.1392*, Disponible en <http://arxiv.org/abs/0902.1392>.
- WEI, H. Spinor dark energy and cosmological coincidence problem. *Physics Letters B*, vol. 695(1-4), páginas 307–311, 2011.
- WEINBERG, S. Conceptual foundations of the unified theory of weak and electromagnetic interactions. *Reviews of Modern Physics*, vol. 52(3), páginas 515–523, 1980.
- WEINBERG, S. Cosmological constraints on the scale of supersymmetry breaking. *Physical Review Letters*, vol. 48(19), páginas 1303–1306, 1982.
- WESSON, P. S. Clue to the unification of gravitation and particle physics. *Physical Review D*, vol. 23(8), páginas 1730–1734, 1981.
- WESSON, P. S. The effective properties of matter of Kaluza-Klein solitons. *Physics Letters B*, vol. 276(3), páginas 299–302, 1992.
- WESSON, P. S. *Space-Time-Matter: Modern Kaluza-Klein Theory*. World Scientific Publishing Company, primera edición, 1999.
- WESSON, P. S. The 4D Klein-Gordon, Dirac and quantization equations from 5D null paths. *General Relativity and Gravitation*, vol. 35(1), páginas 111–119, 2003.
- WESSON, P. S. The spins of astrophysical systems and extended gravitational theory. *Astrophysics and Space Science*, vol. 299(4), páginas 317–327, 2005.
- WESSON, P. S. *Five-Dimensional Physics: Classical and Quantum Consequences of Kaluza-Klein Cosmology*. World Scientific, Singapore, 2006.
- WESSON, P. S. *Space-Time-Matter: Modern High-Dimensional Cosmology*. World Scientific Publishing Company, segunda edición, 2007.
- WESSON, P. S. General relativity and quantum mechanics in five dimensions. *Physics Letters B*, vol. 701(4), páginas 379–383, 2011.
- WESSON, P. S., MASHHOON, B., LIU, H. y SAJKO, W. N. Fifth force from fifth dimension. *Physics Letters B*, vol. 456(1), páginas 34–37, 1999.
- WESSON, P. S. y PONCE DE LEÓN, J. Kaluza-Klein equations, Einstein's equations, and an effective energy-momentum tensor. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 33(11), páginas 3883–3887, 1992.
- WHITING, B. Mode stability of the Kerr black hole. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 30(6), páginas 1301–1305, 1989.
- WIGNER, E. P. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group. *Annals of Mathematics*, vol. 40, páginas 149–204, 1939.
- WITTEN, E. Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space. *Communications in Mathematical Physics*, vol. 252(1-3), páginas 189–258, 2004.

- WOOD-VASEY, W. ET AL. Observational constraints on the nature of dark energy: First cosmological results from the essence supernova survey. *The Astrophysical Journal*, vol. 666(2), páginas 694–715, 2007.
- YOUM, D. Extra force in brane worlds. *Physical Review D*, vol. 62(8), página 084002, 2000.
- YOUM, D. Null geodesics in brane world universe. *Modern Physics Letters A*, vol. 16(37), páginas 2371–2380, 2001.
- ZHIDENKO, A. Quasi-normal modes of Schwarzschild-de Sitter black holes. *Classical and Quantum Gravity*, vol. 21(1), página 273, 2004.

