

# Caminante aleatorio multifractal

Trabajo de Diploma

Alumno: Pablo Alejandro Sánchez  
Director: Héctor Omar Martín

*Departamento de Física  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad Nacional de Mar del Plata*

Mayo de 2008

## Agradecimientos

*A mis padres Carmen y José por su infinita paciencia,  
a mi director por su invaluable experiencia y generosidad  
y a mis compañeros por su contención.*

# Índice General

---

## Parte I. Preliminares

---

<b>1. Introducción</b> .....	4
<b>2. Caminante aleatorio con variación exponencial del paso</b> .....	5
2.1 Definición del modelo original. Propiedades .....	5
2.2 Autosimilaridad y dimensión de capacidad .....	8
2.3 Resumen .....	11

---

## Parte II. El modelo restringido

---

<b>3. Caminante aleatorio con restricción de pasos</b> .....	14
3.1 Definición del modelo con restricción. Propiedades .....	14
3.2 Falta de autosimilaridad .....	15
3.3 Propiedades geométricas. Inhomogeneidad .....	15
3.4 Resumen .....	23
<b>4. Invariancia de escala. Gráfico de la función de conteo de cajas</b> .....	25
4.1 Consideraciones Generales .....	25
4.2 Análisis basado en dos valores del índice de escala .....	25
4.3 El límite de escalas pequeñas con $0 < f \leq 1/2$ .....	28
4.4 Discusión sobre la dimensión de conteo de cajas .....	34
4.5 Resumen .....	35
<b>5. Conclusiones</b> .....	36
<b>Referencias</b> .....	38

Parte I

**Preliminares**

# 1. Introducción

El modelado por medio de caminantes aleatorios [6] ha servido para estudiar gran cantidad de fenómenos, entre ellos, el movimiento Browniano, procesos de difusión y deposición de partículas, etc.

Un enfoque particularmente rico en resultados sigue siendo el estudio de exponentes y dimensiones sobre estos modelos [4], [3]; y es en ese sentido que se introdujo un modelo de caminante aleatorio con paso variable [1], que representa el objeto de nuestro estudio.

El propósito de este trabajo es analizar detalladamente las características de la distribución espacial de puntos de llegada del caminante después de realizar  $N$  pasos. Principalmente se estudiará el caso en que  $N$  tiende a infinito.

Se mostrará que, para ciertos valores del parámetro  $s$  (factor de paso) del modelo, y para ciertos subconjuntos de puntos de llegada, se obtendrá una distribución inhomogénea sobre un soporte fractal.

Como es usual para caminatas al azar, las trayectorias de  $N$  pasos contienen combinaciones de pasos a la derecha y a la izquierda dados con igual probabilidad. En el presente trabajo se estudia el subconjunto de trayectorias de  $N$  pasos que corresponden a una determinada razón  $f$  entre el número de pasos dados por el caminante hacia la derecha  $R$ , y el número total de pasos  $N$ , ( $f = R/N$ ).

Se verá también que la restricción del modelo con el parámetro  $f$  tendrá consecuencias en el escaleo del conjunto de puntos de llegada.

Otra propiedad es que se mantiene el *diagrama de fases* del modelo sin restricción de pasos, donde las distintas *fases* se refieren a las diferentes características de la mencionada distribución y tales que, como función del parámetro  $s$ , estarán separadas por *puntos críticos*.

Además el conjunto posee una jerarquía de exponentes multifractales [2] que son función de la frecuencia de pasos  $f$ .

## 2. Caminante aleatorio con variación exponencial del paso

### 2.1 Definición del modelo original. Propiedades

En una publicación del año 2000 [1] se introdujo un caminante aleatorio en una dimensión con variación exponencial de la longitud de paso. Las reglas de la caminata se indican a continuación:

1. Comienza la caminata en  $X = 0$  con un paso de longitud 1 a la izquierda o a la derecha con igual probabilidad.
2. En el  $k$ -ésimo paso el caminante salta una longitud  $s^{k-1}$  a la izquierda o a la derecha con igual probabilidad. Aquí, el parámetro  $s$  es cualquier número real positivo, y será llamado *factor de paso*.
3. En total se dan  $N$  pasos.

El conjunto de todas las posiciones finales posibles después de  $N$  pasos con factor de paso  $s$ , se puede representar simbólicamente como  $\{X_I(N, s)\}$  con  $I = 0, 1, 2, \dots, 2^N - 1$ . Dichos valores están dados por

$$X_I(N, s) = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{I,k} s^k \quad (2.1)$$

donde  $\sigma_{I,k}$  es una matriz cuyas filas son todas las combinaciones de  $N$  signos menos o más (en realidad  $\sigma_{I,k} = \pm 1$  es una variable aleatoria con distribución uniforme). Este conjunto tiene cotas inferior y superior que corresponden a los casos en los que todos los signos son menos o más respectivamente. Así,

$$-\frac{1-s^N}{1-s} \leq X_I \leq \frac{1-s^N}{1-s} \quad (2.2)$$

Si  $s < 1$  ( $s > 1$ ) el tamaño de cada paso disminuye (crece) exponencialmente, mientras que en el caso  $s = 1$  recuperamos el caminante aleatorio estándar [6]. El primer momento de la distribución de posiciones finales se puede obtener fácilmente de

$$\langle X \rangle_N = \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{I,k} s^k \right\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle \sigma_{I,k} \rangle s^k = 0$$

dado que  $\langle \sigma_{I,k} \rangle = (-1)\frac{1}{2} + (+1)\frac{1}{2} = 0$ . Para el segundo momento tenemos la siguiente relación de recurrencia

$$\langle X^2 \rangle_{N+1} = \left\langle (X_I(N, s) \pm s^N)^2 \right\rangle = \langle X^2 \rangle_N + s^{2N}$$

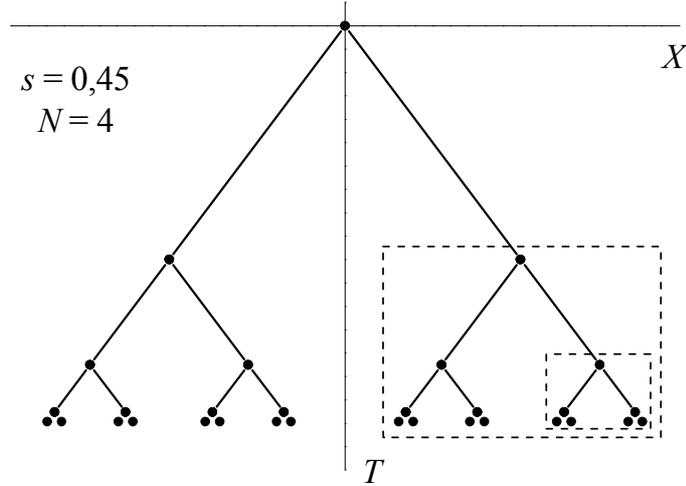
que iterada se convierte en

$$\sigma^2 = \langle X^2 \rangle_N = \sum_{k=0}^{N-1} s^{2k} = \frac{1 - s^{2N}}{1 - s^2} \tag{2.3}$$

Si  $s < 1$  la desviación estándar está acotada y para  $N$  suficientemente grande  $\sigma^2 \rightarrow \frac{1}{1-s^2}$ . Para  $s > 1$  la desviación estándar diverge como  $s^N$ . Finalmente para  $s = 1$  y haciendo uso de la regla de L'Hospital la desviación estándar crece como  $\sqrt{N}$ , resultado esperado para el caminante aleatorio estándar.

De esta forma el valor  $s = 1$  se comporta como un punto crítico que separa dos comportamientos distintos. De las expresiones (2.2) y (2.3) se puede ver que por un lado ( $s < 1$ ) se tiene un proceso de *difusión atenuada* dentro de un dominio acotado, mientras que por el otro ( $s > 1$ ) existe un proceso de *difusión amplificada* en una región no acotada.

Las representaciones espacio-tiempo del proceso, como en la Figura 2.1, son útiles para comprender algunas de las características del conjunto de posiciones finales. Por ejemplo, la formación de huecos o *gaps* cuando  $s < \frac{1}{2}$  se debe a que las dos ramas formadas luego del primer paso (a la derecha y a la izquierda del origen de coordenadas) no se superponen, generando una región central no alcanzada por ninguna trayectoria. Si  $\frac{1}{2} < s < 1$ , las dos ramas se solapan generando regiones de acumulación de puntos.



**Fig. 2.1.** Diagrama espacio-tiempo del proceso para  $s = 0.45$  y  $N = 4$ . El tiempo  $T$  es el número de pasos. Se aprecia que los caminos nunca se cruzan, quedando el gap más grande al centro. Es evidente la autosimilaridad del diagrama espacio-tiempo y del conjunto de puntos de llegada, comparando las regiones en línea de trazos con la estructura completa.

Para explicar la formación de huecos es conveniente introducir la función *gap central*. Primero, para el caso  $s > 1$ , podemos relacionar el conjunto de posiciones finales para  $N - 1$  pasos con el de  $N$  pasos. Sabemos que

$$X_I(N) = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{I,k} s^k = X_I(N - 1) \pm s^{N-1}$$

entonces, podemos escribir

$$\{X_I(N)\} = \{X_I(N-1) - s^{N-1}\} \cup \{X_I(N-1) + s^{N-1}\} \quad (2.4)$$

Definimos así la función gap central para  $s > 1$  como la diferencia entre el elemento más pequeño del segundo conjunto y el más grande del primero en el miembro derecho de la expresión (2.4). En símbolos

$$G_N = \left( -\frac{1-s^{N-1}}{1-s} + s^{N-1} \right) - \left( \frac{1-s^{N-1}}{1-s} - s^{N-1} \right) = 2 \left( \frac{s^{N-1}(s-2)+1}{s-1} \right)$$

Estrictamente, si  $s \geq 2$  el gap es positivo para todo  $N$  y se puede verificar fácilmente que es una función creciente de  $N$  que diverge como  $s^{N-1}$ .

Para cada  $N$  hay algún valor en el intervalo  $s \in [1, 2]$  que anula la función gap. Este valor es la raíz del polinomio  $s^{N-1}(s-2)+1=0$ , que puede convertirse en

$$\left( \frac{1}{s} \right)^{N-1} = -s+2$$

El valor de la raíz es la intersección de las curvas correspondientes a cada miembro de la última igualdad. Aquí conviene ver la Figura 2.2.

Para valores de  $s$  menores que la raíz, el gap es negativo y los dos conjuntos en la expresión (2.4) se superponen.

Análogamente, si  $s < 1$  la relación entre el conjunto de posiciones finales para  $N-1$  pasos y  $N$  pasos resulta de

$$X_I(N) = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{I,k} s^k = \pm 1 + s \sum_{k=0}^{N-2} \sigma_{I,k} s^k = \pm 1 + s X_I(N-1)$$

con lo cual

$$\{X_I(N)\} = \{-1 + s X_I(N-1)\} \cup \{1 + s X_I(N-1)\} \quad (2.5)$$

La función gap central para  $s < 1$  se define de la misma manera a partir de la expresión (2.5), entonces

$$g_N = \left( 1 - s \frac{1-s^{N-1}}{1-s} \right) - \left( -1 + s \frac{1-s^{N-1}}{1-s} \right) = 2 \left( \frac{\frac{1}{s} - 2 + s^{N-1}}{\frac{1}{s} - 1} \right)$$

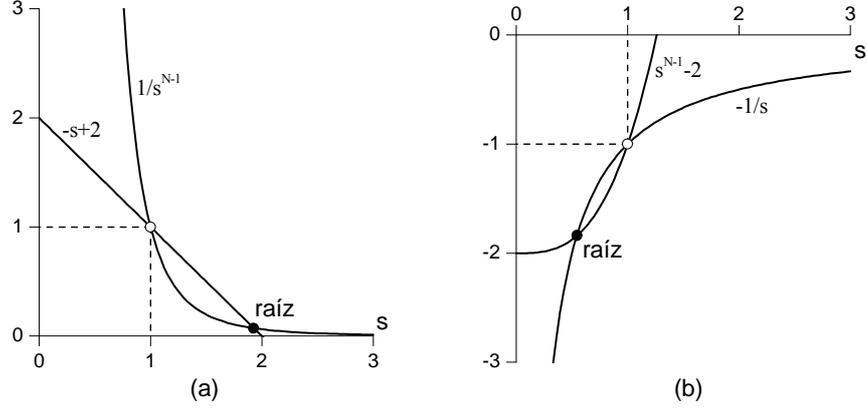
Si  $s \leq \frac{1}{2}$  el gap es positivo para todo  $N$  aunque ahora resulta una función decreciente de  $N$  con límite  $g_N \rightarrow 2 \left( \frac{1-2s}{1-s} \right)$  para  $N \rightarrow \infty$ . Existe además un valor  $s \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$ , raíz de

$$\frac{1}{s} - 2 + s^{N-1} = 0$$

que anula la función gap y que se puede analizar a partir del gráfico de la Figura 2.2. Para valores de  $s$  mayores que la raíz el gap es negativo y los conjuntos en la expresión (2.5) se superponen.

Otra notable característica del conjunto de puntos es la aparición de una simetría que resultará muy útil para relacionar diferentes regiones en el espacio  $s$ . Partimos de

$$\frac{X_I(N, s)}{s^{N-1}} = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{I,k} \left( \frac{1}{s} \right)^{N-1-k} = \sum_{k'=N-1}^0 \sigma_{I,k'} \left( \frac{1}{s} \right)^{k'}$$



**Fig. 2.2.** Gráfico del valor de  $s$  (raíz) que amula la función gap para el caso, (a)  $s > 1$  y para, (b)  $s < 1$ .

donde se aplicó el cambio de variable  $k' = N - 1 - k$ . Es decir, resulta una relación entre los conjuntos

$$\left\{ \frac{X_I(N, s)}{s^{N-1}} \right\} = \left\{ X_{I'} \left( N, \frac{1}{s} \right) \right\}$$

Como consecuencia, la transformación  $s \rightarrow \frac{1}{s}$  es equivalente a una transformación de inversión temporal  $T \rightarrow -T$  (el tiempo  $T$  se representa por el número de pasos  $N$ ). El proceso resulta invariante bajo las transformaciones combinadas  $s \rightarrow \frac{1}{s}$  y  $T \rightarrow -T$ . Con esta simetría, cada cosa que probemos para  $s < 1$ , tendrá su equivalente para  $s > 1$ .

Mostraremos como ejemplo, que relación existe entre el gap central para el caso  $s < 1$  y para  $s > 1$ . Comenzamos con  $s > 1$  y escribimos

$$\frac{G_N(s)}{s^{N-1}} = \frac{2}{s^{N-1}} \left( s^{N-1} - \frac{1 - s^{N-1}}{1 - s} \right) = g_N \left( \frac{1}{s} \right)$$

## 2.2 Autosimilaridad y dimensión de capacidad

Se denomina *autosimilaridad* [4], [5], [3] a la propiedad que presentan ciertos conjuntos de puntos, que consiste en la repetición de estructuras a diferentes escalas de longitud.

A partir de la ecuación (2.1) que define el proceso, se demuestra que cada posición alcanzada después de  $n < N$  pasos se puede considerar el punto de inicio de un nuevo proceso pero escalado en  $s^n$ . En símbolos

$$\begin{aligned} X_I(N, s) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_{I',k} s^k + \sum_{k=n}^{N-1} \sigma_{I'',k} s^k = \\ &= X_{I'}(n, s) + s^n X_{I''}(N - n, s) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como consecuencia, si  $N \rightarrow \infty$  cada patrón del proceso será repetido infinitas veces pero escalado por un factor  $s$  cada vez generando así autosimilaridad en el diagrama espacio-tiempo y en el conjunto de posiciones finales. En la Figura 2.1 se observan dos

patrones en línea de trazos. Esta propiedad junto con la simetría nos permite extender el análisis realizado sobre el gap central a otros huecos sobre la estructura. Por ejemplo (ver la Figura 2.3), el gap formado luego de  $n$  pasos para  $s < \frac{1}{2}$  se obtiene de la expresión (2.6) restando el elemento más grande del cluster izquierdo al elemento más pequeño del cluster derecho

$$\begin{aligned} g_N^n &= \left( X(n) + s^n \left( 1 - s \frac{1 - s^{N-n-1}}{1 - s} \right) \right) - \\ &\quad - \left( X(n) + s^n \left( -1 + s \frac{1 - s^{N-n-1}}{1 - s} \right) \right) = \\ &= 2s^n \left( \frac{\frac{1}{s} - 2 + s^{N-n-1}}{\frac{1}{s} - 1} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

De la misma forma, se puede obtener para  $s > 2$

$$G_N^n = 2s^n \left( \frac{s^{N-n-1}(s-2) + 1}{s-1} \right)$$

La autosimilaridad estricta se destruye en el caso  $\frac{1}{2} < s < 2$  debido al solapamiento de los conjuntos en (2.4) y (2.5), es decir, para valores negativos de  $G_N$  y  $g_N$ .

Otra característica del proceso para  $s > 2$  (o para  $s < \frac{1}{2}$  utilizando la simetría  $s \rightarrow \frac{1}{s}$ ) es que es *retrodictivo*, es decir que cada posición final puede ser alcanzada solamente por un camino. Esta propiedad puede demostrarse utilizando la transformación

$$Y_I = \frac{1}{2}X_I + \frac{1}{2} \left( \frac{1 - s^N}{1 - s} \right)$$

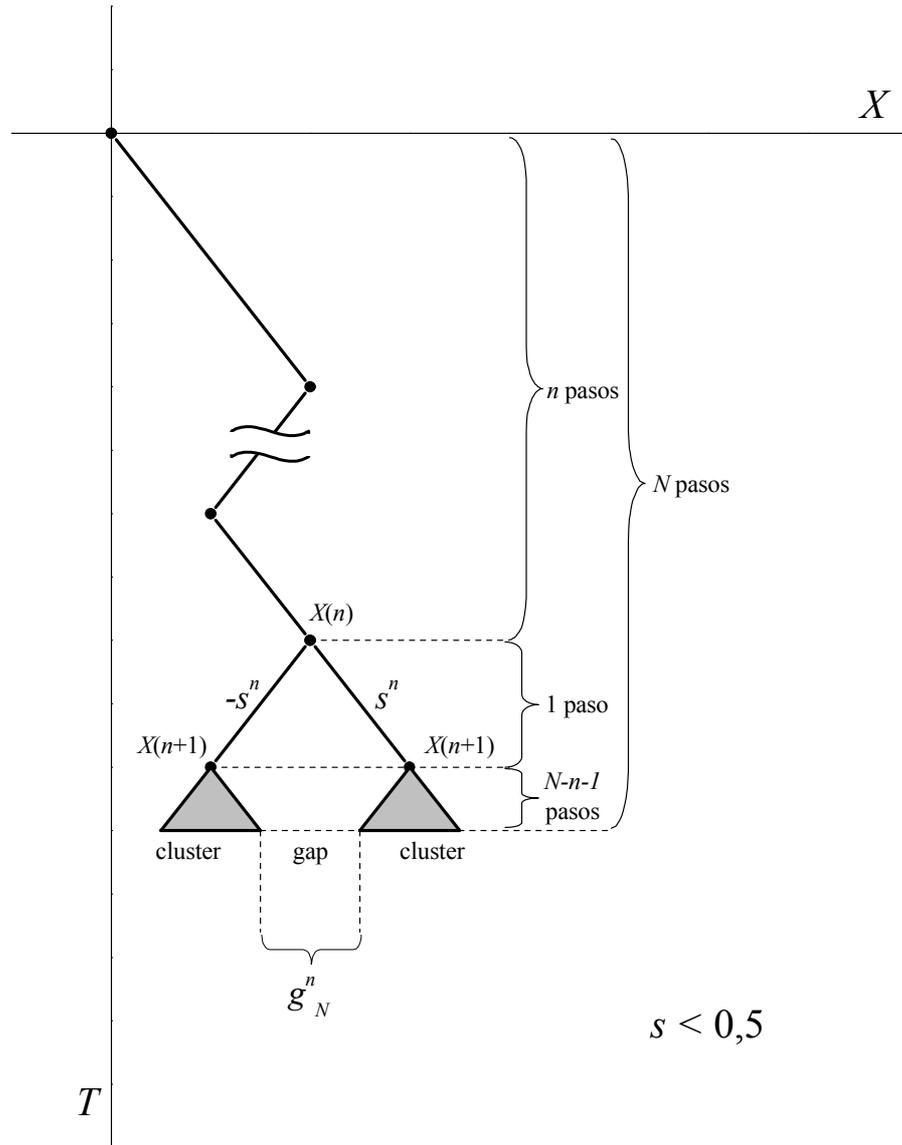
y la unicidad del desarrollo de un número real en una base  $s$ .

Cuando  $\frac{1}{2} \leq s \leq 2$  ya no hay más huecos en la distribución y puede probarse que cada punto  $x \in \left[ -\frac{1}{1-s}, \frac{1}{1-s} \right]$  puede ser alcanzado al menos por un camino. Además, bajo ciertas condiciones existe un número infinito de caminos que llegan a la misma posición final. Todo esto hace que el proceso ya no sea más retrodictivo.

Para el caso retrodictivo, es decir  $s < \frac{1}{2}$  o  $s > 2$ , se presenta otra importante propiedad de los conjuntos de posiciones finales con  $N \rightarrow \infty$ ; todos ellos son *fractales* [4], [5], [3]. El caso  $s = \frac{1}{3}$  se corresponde exactamente con el Conjunto de Cantor.

Siguiendo los pasos de [3]; para encontrar la dimensión  $D_B$  con  $s < \frac{1}{2}$  emplearemos el método *box counting*. En este caso se mantiene el tamaño de la estructura de puntos fijo, o sea que tenemos un total de  $2^N$  puntos, con  $N \gg 1$  (fijo). La estructura corresponde así a  $N$  pasos.

Observando el ejemplo para  $N = 3$  pasos de la Figura 2.4 podemos cubrir cada punto de la estructura con cajas de tamaño  $\ell_3 = 2s^2$ , que corresponde a la mínima separación entre puntos. Tendremos en total  $M_3 = 2^3$  cajas de este tipo, cada una con un punto en su interior. Luego cubrimos pares de puntos consecutivos con cajas de tamaño  $\ell_2 = 2s$ , que corresponde a la separación de puntos de la caminata con un paso menos. Serán  $M_2 = 2^2$  cajas con dos puntos en su interior. Para el caso de cajas con cuatro puntos se toma finalmente la separación entre los dos puntos para una caminata de un paso, es decir  $\ell_1 = 2$ . En este último caso son  $M_1 = 2$  cajas con cuatro puntos dentro.



**Fig. 2.3.** Diagrama espacio-tiempo que muestra la formación de un gap a una escala intermedia, luego de  $n$  pasos. El gap se sitúa entre dos estructuras (clusters) de puntos.

Si se repite este proceso para la estructura general con  $N$  pasos, cubrimos los puntos del conjunto con cajas de igual tamaño  $\ell_n = 2s^{n-1}$  contando el número de cajas resultante, es decir  $M_n = 2^n$ . Es importante observar que cada caja contendrá entonces  $2^{N-n}$  puntos. Lo mismo puede hacerse para  $n + 1$ . Es evidente la relación entre escalas y cantidades de puntos

$$\begin{cases} \ell_{n+1} = s\ell_n \\ M_{n+1} = 2M_n \end{cases}$$

La dimensión surge de la relación de escaleo

$$M(\ell) \sim \ell^{-D_B}$$

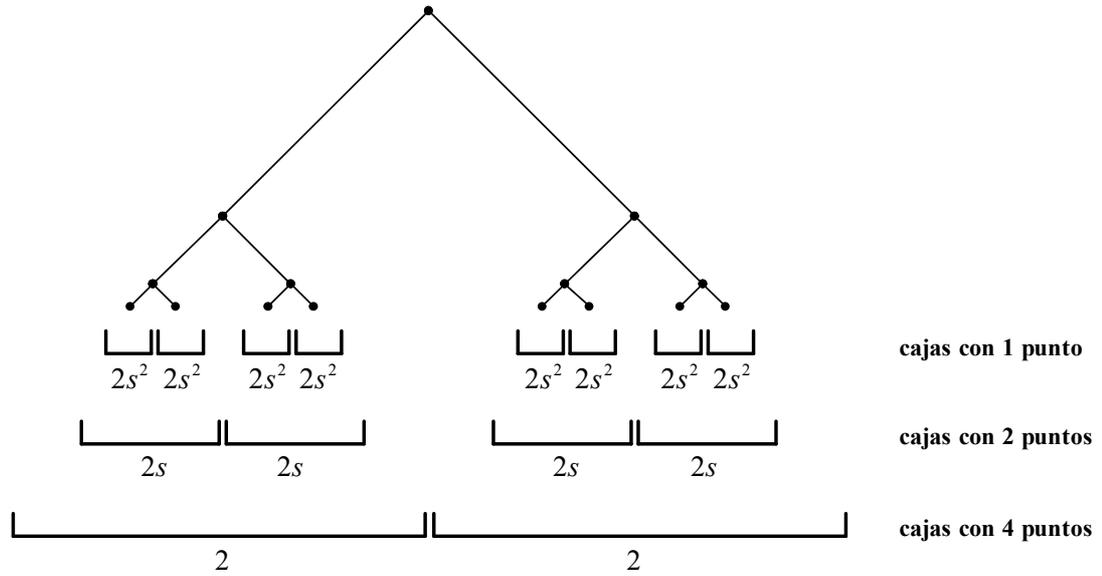


Fig. 2.4. Sistema de conteo para calcular la dimensión de este conjunto. El gráfico reproduce una caminata de  $N = 3$  pasos para  $s < \frac{1}{2}$ .

a través de una simple operación aritmética. la cual es consistente con la definición dada en [3]. Se puede despejar fácilmente la dimensión buscada de esta última expresión obteniéndose

$$D_B = \lim_{\ell_n \rightarrow 0} \frac{\ln M(\ell_n)}{\ln \frac{1}{\ell_n}} = - \lim_{n \rightarrow N} \frac{\ln M_n}{\ln \ell_n} = - \frac{\ln 2}{\ln s}$$

para todo valor  $1 \leq n \leq N$  tal que  $N \gg 1$  y  $s < \frac{1}{2}$ .

Utilizando la simetría  $s \rightarrow \frac{1}{s}$  se puede obtener finalmente para  $s > 2$  el valor  $D_B = \frac{\ln 2}{\ln s}$ .

### 2.3 Resumen

Podemos representar todo lo expuesto hasta aquí en el diagrama de fases de la Figura 2.5 que muestra la dependencia del proceso con el factor de paso. Así, el valor  $s = 1$  divide los conjuntos en dos regiones que difieren en su régimen de difusión, según lo expuesto en las expresiones (2.2) y (2.3).

Por otra parte, los valores  $s = \frac{1}{2}$  y  $s = 2$  separan tres regiones que difieren en su topología; una región central continua y otras dos fractales.

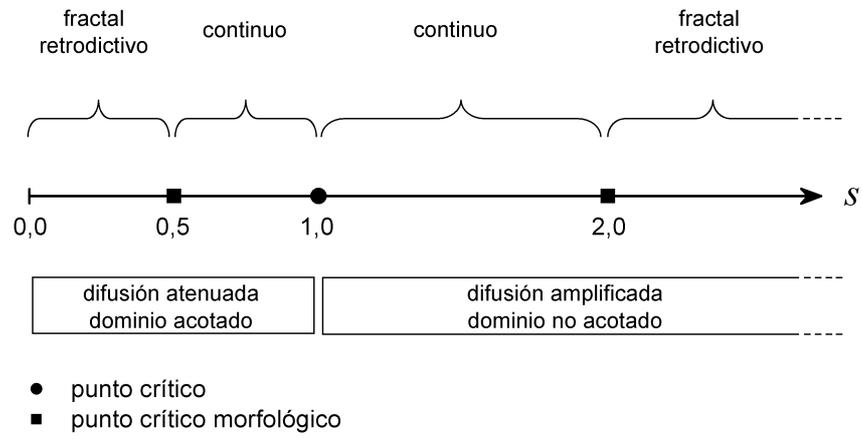


Fig. 2.5. Dependencia del proceso con el factor de paso  $s$ .

Parte II

## **El modelo restringido**

### 3. Caminante aleatorio con restricción de pasos

#### 3.1 Definición del modelo con restricción. Propiedades

Como continuación del modelo de caminante aleatorio introducido en la sección anterior [1], presentaremos ahora una variante del mismo. Veremos como cierta restricción impuesta a su dinámica afecta las propiedades del conjunto de todas las posiciones finales, y calcularemos su dependencia con la escala. Se agrega una restricción al conjunto total de trayectorias, limitándolo a un subconjunto de  $N$  pasos correspondiente a una cierta razón  $f$  entre el número de pasos dados por el caminante hacia la derecha  $R$ , y el número total de pasos  $N$ , de tal forma que  $f = \frac{R}{N}$ . Así,  $f$  será constante sin importar el número  $N$  de pasos y lo llamaremos *frecuencia de pasos*.

En nuestro modelo los puntos del conjunto de todas las posiciones finales se pueden obtener a partir del conjunto de posiciones finales del caso sin restricción, tomando de este último los puntos que correspondan a una frecuencia dada y excluyendo los demás.

Como en el caso anterior representaremos el conjunto de todas las posiciones finales posibles como  $\{X_R(N, s)\}$  pero ahora el número de posiciones finales se reduce a las permutaciones con repetición de  $N$  objetos con  $R$  repetidos (pasos a la derecha) y  $N - R$  repetidos (pasos a la izquierda). Es decir, serán  $\binom{N}{R}$  posiciones finales posibles.

Los valores que toman las posiciones finales están dados por,

$$X_R(N, s) = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_k s^k \quad (3.1)$$

mientras que la restricción impuesta sobre los pasos toma la forma de una suma,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_k &= \overbrace{+1 + 1 + \dots + 1}^R \overbrace{-1 - 1 - \dots - 1}^{N-R} \\ &= 2R - N = (2f - 1)N \end{aligned} \quad (3.2)$$

Formalmente, la simetría  $s \rightarrow \frac{1}{s}$ ,  $T \rightarrow -T$  deja la última expresión invariante, por lo tanto también resulta una simetría para nuestro caso con restricción. Gracias a ésta, cada cosa que podamos probar para  $s < 1$  tendrá su equivalente para el caso  $s > 1$ .

Introduciremos otra simetría relacionada con el nuevo parámetro  $f$ , que será de utilidad para restringir el número de casos a analizar. A partir de la siguiente relación entre números

$$-(2f - 1)N = [2(1 - f) - 1]N$$

y utilizando la expresión (3.2) obtenemos

$$\sum_{k=0}^{N-1} (-\sigma_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma'_k$$

de donde  $\sigma'_k = -\sigma_k$  con  $f' = 1 - f$ . Ahora, sustituyendo en (3.1) resulta

$$X'_R(N, s) = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma'_k s^k = -X_R(N, s)$$

Por lo tanto, el conjunto de posiciones finales para el caso con restricción permanece invariante frente a las transformaciones simultáneas  $f \rightarrow 1 - f$  y  $X \rightarrow -X$ . Con esta nueva simetría cada cosa que podamos probar para  $f < \frac{1}{2}$  tendrá un equivalente para  $f > \frac{1}{2}$ . Con el uso de estas dos simetrías el espectro de casos a analizar se reduce.

De ahora en adelante estudiaremos sólo los casos con  $0 < f < \frac{1}{2}$  y  $0 < s < \frac{1}{2}$ . El caso  $f = \frac{1}{2}$  será analizado en detalle en el último capítulo.

### 3.2 Falta de autosimilaridad

Veremos que en nuestro caso del conjunto de posiciones finales con restricción, la característica de autosimilaridad se pierde.

Mostraremos con un simple ejemplo el origen de la falta de autosimilaridad en nuestro caso particular. En la Figura 3.1 se puede observar la relación entre los conjuntos de llegada para  $N' = 4$  pasos y  $N = 2$  pasos, ambos con  $f = \frac{1}{2}$ .

- En el diagrama algunos caminos con  $N' = 4$  y  $f = \frac{1}{2}$  son generados por caminos con  $N = 2$  y  $f = \frac{1}{2}$  (ilustrados en línea continua).
- No todos los caminos con  $N = 2$  y  $f = \frac{1}{2}$  generan caminos con  $N' = 4$  y  $f = \frac{1}{2}$ . Por ejemplo, se generan caminos con  $N' = 4$  y  $f = \frac{3}{4}$  (Este caso no se ilustra ya que no es esencial para la destrucción de la autosimilaridad).
- No todos los caminos con  $N' = 4$  y  $f = \frac{1}{2}$  son generados por caminos con  $N = 2$  y  $f = \frac{1}{2}$  (ilustrados en línea de trazos). Por ejemplo, son generados por caminos con  $N = 2$  y  $f = 0$ .
- Una importante conclusión es que todos los caminos con  $N' = 4$  y  $f = \frac{1}{2}$  son generados por todos los caminos con  $N = 2$  y  $f = \frac{1}{2}$  y por algunos otros caminos con  $N = 2$  y  $f \neq \frac{1}{2}$ .

Resumiendo todo esto y a partir del análisis de un simple ejemplo se concluye que *el conjunto de puntos con  $N$  pasos y frecuencia  $f$  no puede obtenerse sólo de un único conjunto con la misma frecuencia  $f$  perteneciente a alguna de las generaciones previas.*

### 3.3 Propiedades geométricas. Inhomogeneidad

Abordaremos el análisis de la estructura de puntos para nuestro modelo restringido de forma similar a lo hecho para el caso original. Primero desdoblaremos el conjunto de posiciones finales para  $N$  pasos agregando la restricción y mostrando la relación entre los subconjuntos de puntos a diferentes escalas, luego se justificará la aparición de la inhomogeneidad en la distribución de puntos. Sea así, el conjunto de todas las posiciones finales para  $N$  pasos con frecuencia de pasos  $f$ . Podemos desarrollar hasta un número de pasos  $n$ ,

$$\begin{aligned} X_R(N, s) &= \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_k s^k = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k s^k + s^n \sum_{k=0}^{N-n-1} \sigma'_k s^k \\ &= X_r(n, s) + s^n X_{R-r}(N - n, s) \end{aligned} \tag{3.3}$$

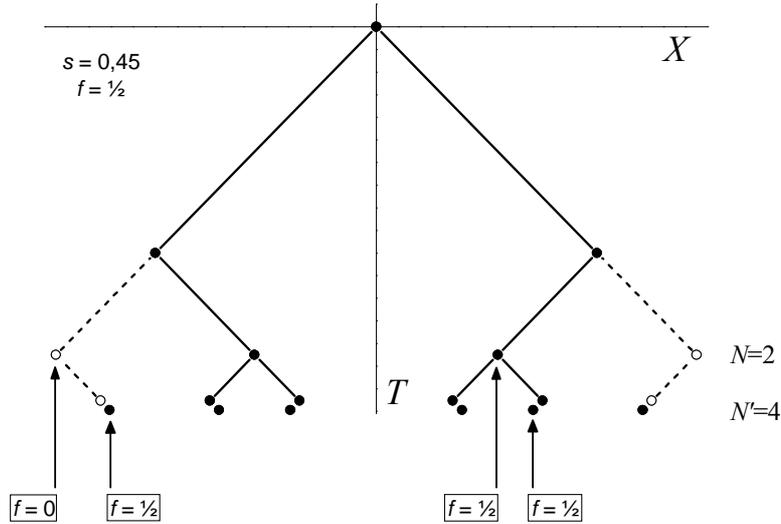


Fig. 3.1. Diagrama espacio-tiempo para  $s < \frac{1}{2}$  que ilustra la ausencia de autosimilaridad.

De lo visto en la sección anterior sabemos que la estructura de  $N$  pasos y frecuencia  $f$  proviene en realidad de las estructuras de  $n$  pasos con diferentes frecuencias  $f'$ . Recordemos además que  $R = fN$ . Esto quiere decir que aunque el número  $n$  sea fijo tendremos diferentes valores para el índice  $r$ , tal que satisfacen la relación  $r = f'n$ . En lenguaje de la caminata, la estructura consta de  $N$  (fijo) pasos con  $R$  (fijo) a la derecha mientras que la estructura intermedia consta de  $n$  (fijo) pasos con  $r$  (variable) a la derecha. Esto resultará útil para explicar la formación de clusters a escalas intermedias como se puede ver en el diagrama espacio-tiempo de la Figura 3.2. Más adelante veremos la utilidad de variar el índice  $n$ , al que llamaremos *índice de escala*.

Inspeccionando la relación (3.3) se observa que existe una correspondencia entre las funciones posición y los números de puntos que ellas generan; la misma está dada por la siguiente regla:

*Se da la siguiente correspondencia entre los conjuntos de posiciones finales y sus respectivas cantidades de puntos*

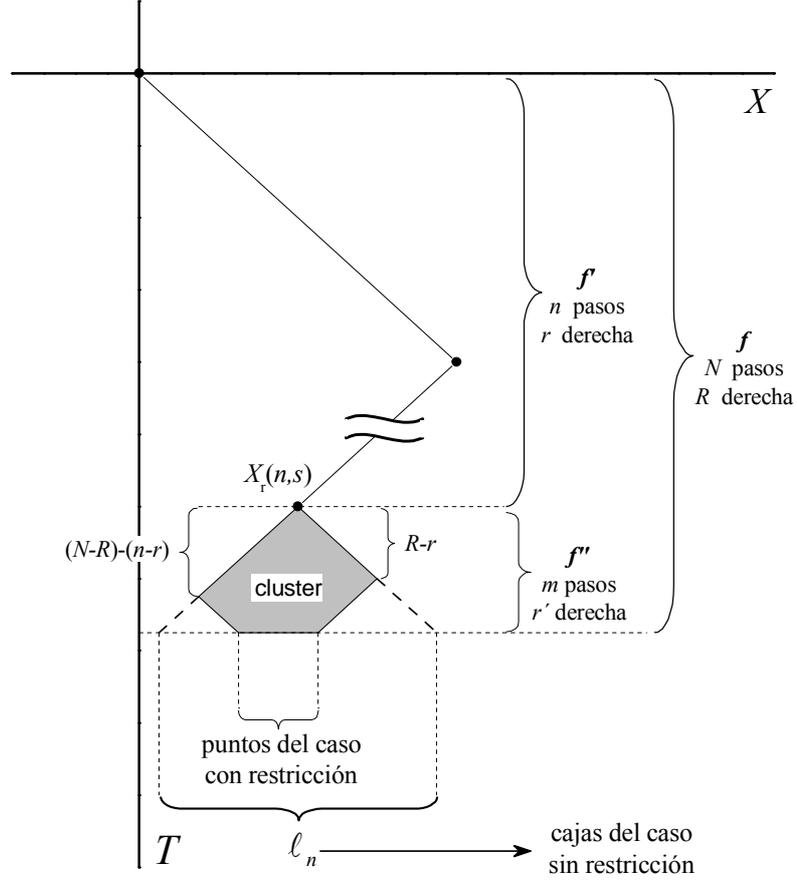
$$X_R(N, s) \rightarrow \binom{N}{R}$$

*entonces también se debe cumplir, para ambas*

$$X_r(n, s) \rightarrow \binom{n}{r}$$

$$X_{R-r}(N-n, s) \rightarrow \binom{N-n}{R-r}$$

Podemos expresar todo esto diciendo que a una escala fijada por el índice  $n$ , se observará una estructura de  $N$  pasos que constará de  $\sum_r \binom{n}{r}$  cajas, cada una de las cuales contendrá  $\binom{N-n}{R-r}$  puntos. Solo faltaría saber cuales valores serían posibles para el parámetro  $r$ . Esto se resuelve simplemente de pedir que los números combinatorios queden bien definidos como función de sus argumentos.



**Fig. 3.2.** Diagrama donde se aprecia la formación de un cluster a partir de  $n$  pasos en una estructura de  $N$  pasos con restricción  $R$ . El caso dibujado reproduce un cluster con restricción  $r$  impuesta sobre los  $n$  pasos. Como se ve en el dibujo los puntos del caso restringido están contenidos en las cajas del caso sin restricción. Aquí  $s < \frac{1}{2}$ .

Se satisface además una relación compacta donde figuran todas las frecuencias asociadas a cada tramo de la caminata. Observando la Figura 3.2 sabemos que

$$n + m = N \tag{3.4}$$

$$r + r' = R \tag{3.5}$$

donde podemos introducir  $R = fN$ ,  $r = f'n$  y  $r' = f''m$ . Las posibles frecuencias de pasos  $f'$  para  $n$  pasos y las frecuencias de pasos  $f''$  para los tramos de  $m$  pasos quedarían así relacionadas con la frecuencia  $f$  de toda la estructura. Combinando estas últimas obtenemos finalmente

$$\frac{n}{N}f' + \left(1 - \frac{n}{N}\right)f'' = f \tag{3.6}$$

Toda la información necesaria para reproducir las estructuras a diferentes escalas se puede obtener de la relación (3.6) y de las cotas impuestas por los números combinatorios.

Abordaremos aquí el estudio de las propiedades geométricas del modelo. Para esto emplearemos profusamente el desarrollo [8], [7]

$$\sum_{k=0}^{m-1} x^k = \frac{1 - x^m}{1 - x} \tag{3.7}$$

y su límite asintótico

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \tag{3.8}$$

válido para  $|x| < 1$ .

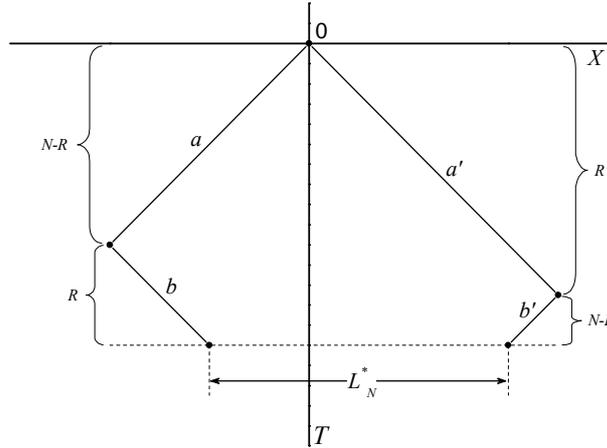
Veamos primero que ocurre con el espacio ocupado por la estructura completa de puntos para el caso  $s < \frac{1}{2}$ . Los casos con  $f = 0$  y  $f = 1$  son triviales y no serán analizados. Sea  $L_N^*$  la distancia entre los puntos extremos para el conjunto completo de puntos finales de la caminata restringida. Observando la Figura 3.3 podemos calcular

$$L_N^* = \frac{2}{1-s} + \frac{2(s^N - s^{N-R} - s^R)}{1-s}$$

Recordemos que para el caso sin restricción la expresión (2.2) nos da el espacio total ocupado por la estructura, que en el límite para  $N \gg 1$  queda

$$L_N = 2 \left( \frac{1-s^N}{1-s} \right) \rightarrow \frac{2}{1-s}$$

y nos muestra que las dos estructuras tienen el mismo límite asintótico.



**Fig. 3.3.** Esquema del espacio ocupado por el conjunto de posiciones finales para  $N$  pasos en el caso con restricción. Aquí  $s < 1$ .

La razón de esto la encontramos en que las cantidades indicadas en la misma figura como  $a$  y  $b$ , los dos tramos de la caminata por el extremo izquierdo, guardan la siguiente relación asintótica para  $N \gg 1$ ,

$$\frac{b}{a} = -s^{N-R} \left( \frac{1-s^R}{1-s^{N-R}} \right) \rightarrow 0$$

Este resultado se repite con los otros dos tramos por el extremo derecho  $a'$  y  $b'$ , lo que justifica que los extremos de las caminatas para los casos con y sin restricción coincidan en el límite de infinita cantidad de pasos.

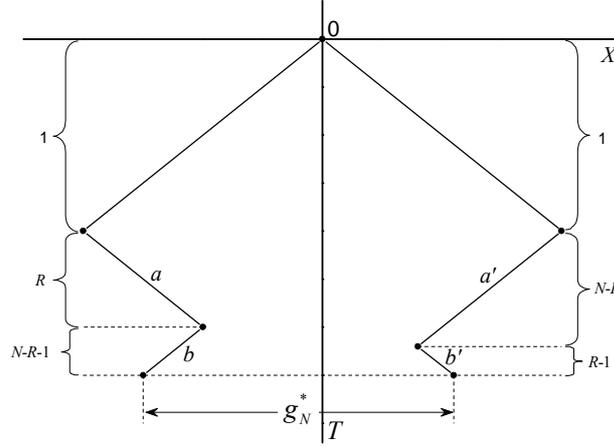
Podemos ver además que la función gap central coincide en el límite asintótico con el gap central del caso sin restricción. A partir de la información de la Figura 3.4 podemos calcular el gap central para  $s < \frac{1}{2}$

$$g_N^* = 2 \left( \frac{1 - 2s}{1 - s} \right) + \frac{2(s^{N-R+1} + s^{R+1} - s^N)}{1 - s}$$

Sustituyendo en la última  $R = fN$  y tomando  $N \gg 1$  nos queda

$$g_N^* \rightarrow 2 \left( \frac{1 - 2s}{1 - s} \right)$$

que coincide con el límite asintótico del caso sin restricción.



**Fig. 3.4.** Esquema que representa la formación del gap central para la estructura restringida siempre que  $s < 1$ .

Podemos ver de la Figura 3.4 que los últimos dos tramos de la caminata por el extremo izquierdo y el derecho siguen la misma relación asintótica que en el caso de la estructura completa de puntos. Por ejemplo, para el extremo izquierdo tenemos

$$\frac{b}{a} = -s^R \left( \frac{1 - s^{N-R-1}}{1 - s^R} \right) \rightarrow 0$$

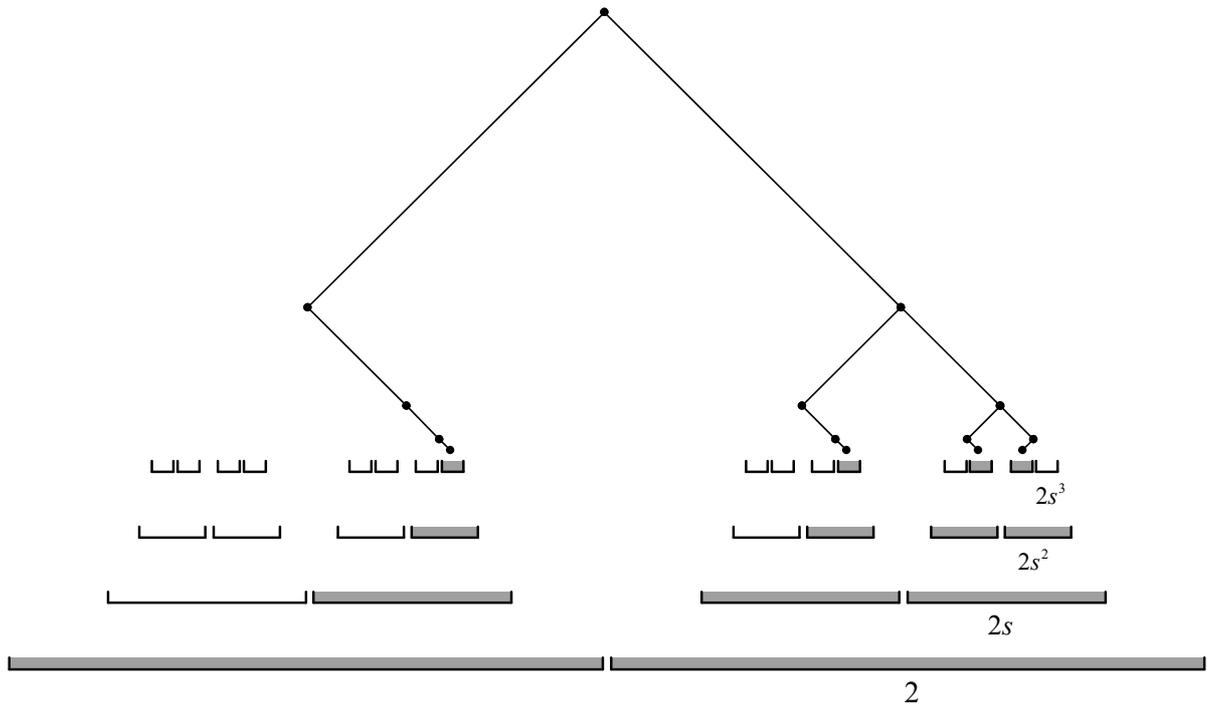
Se repite el mismo comportamiento para el extremo derecho, es decir para  $a'$  y  $b'$ . Este resultado justifica la equivalencia asintótica entre los gaps centrales para ambos casos de la caminata.

Resumiendo todo esto, podemos decir que *en el límite de infinita cantidad de pasos los soportes para los casos con y sin restricción coinciden*. No podríamos decir lo mismo de la forma como los puntos se distribuyen sobre el soporte.

Nos detendremos ahora en el estudio de las escalas o tamaños de caja necesarios para cubrir los puntos de la estructura para nuestro caso restringido. Una consecuencia de las propiedades geométricas es que los puntos del caso restringido están contenidos en las cajas del caso sin restricción (ver Figura 3.2) y en el límite de infinitos pasos ambas estructuras coinciden. Es natural que esto sea así puesto que se mantiene el mismo comportamiento asintótico de los últimos dos tramos tanto por la izquierda como por la derecha del cluster.

Entonces, tomaremos por simplicidad y sin pérdida de generalidad un tamaño de caja  $\ell_n = 2s^{n-1}$  igual al del caso sin restricción.

En la Figura 3.5 se esquematiza el caso de  $N = 4$  pasos con frecuencia  $f = \frac{3}{4}$ . En dicho gráfico se puede ver que a una escala donde las cajas tienen tamaño  $2s^3$ , sólo se observa un punto por caja. Para un tamaño de caja de valor  $2s^2$ , nuevamente tenemos un punto por caja. Pero para un tamaño igual a  $2s$  aparecen cajas con 1 y 2 puntos, el primer indicio de la inhomogeneidad. Finalmente llegamos al caso de las cajas de tamaño 2, una con 1 punto y la otra con 3 puntos. Es importante recordar que las cajas dejan espacios vacíos o gaps idénticos a los del caso sin restricción pero las cajas vacías agregarían más espacio al conjunto, dando la falsa impresión de que esos espacios adicionales persisten. En realidad en el límite de infinita cantidad de pasos no aportan verdadero espacio vacío a los gaps, de hecho estos espacios adicionales desaparecen en dicho límite asintótico.



**Fig. 3.5.** Ejemplo que reproduce los puntos finales de una caminata de 4 pasos con 3 a la derecha para  $s < \frac{1}{2}$ . Las cajas en gris incluyen al menos un punto. Las cajas “vacías” corresponden a los puntos del caso sin restricción. Existen cajas de tamaño  $2s$  que están vacías, que contienen solo 1 punto o bien que contienen hasta 2 puntos.

Abandonaremos aquí el análisis de la estructura geométrica para retomar la distribución de puntos sobre el espacio disponible. Vimos al principio de esta sección que a una cierta escala dada por el índice  $n$  podremos cubrir los puntos de la estructura para  $N$  pasos con cajas de tamaño  $\ell_n = 2s^{n-1}$  de tal forma que observaremos  $M_n = \sum_{r=r_{\min}}^{r_{\max}} \binom{n}{r}$  cajas cada una conteniendo  $\binom{N-n}{R-r}$  puntos. Los valores que toma el índice  $r$  se fijan a partir de los argumentos de los números combinatorios y de la relación (3.6). Podemos expresar esto de forma más elegante haciendo el cambio de variable  $r = f' \cdot n$ , resultando

$$M_n = \sum_{f'} \binom{n}{f'n}$$

Haremos uso aquí y en lo que sigue del siguiente desarrollo asintótico

$$\binom{n}{fn} \cong \frac{2^{n\Delta(f)}}{\sqrt{2\pi f(1-f)n}} \quad (3.9)$$

con  $n \gg 1$ ,  $0 < f < 1$  y  $\Delta(f) = -\frac{1}{\ln 2} [f \ln f + (1-f) \ln(1-f)]$  el cual se puede derivar fácilmente a partir de la formula asintótica de Stirling [8], [7].

Para comprender mejor ciertos aspectos relativos a la forma irregular con que se distribuyen los puntos sobre las cajas (en particular para valores muy pequeños del tamaño de caja  $\ell_n$ ) primero estudiaremos un ejemplo típico donde éste fenómeno es fácilmente reproducible. Recordemos siempre que analizamos los casos con  $s < \frac{1}{2}$ .

El caso  $f = \frac{1}{4}$  presenta todos los ingredientes necesarios para explicar la inhomogeneidad y un segundo aspecto asociado a la misma, la ruptura de la simetría de escala (esto último se pospondrá hasta el siguiente capítulo). En este caso  $N$  debe ser múltiplo de 4, para que tenga sentido hablar de pasos; por ejemplo, para  $N = 4000$  pasos deberían darse en cualquier orden  $R = fN = 1000$  pasos a la derecha. Esto no cambia en nada el análisis del régimen asintótico para  $N \gg 1$ , pero evita inconsistencias como la aparición de cantidades no enteras de pasos.

Construiremos primero un cuadro que contenga el número de cajas y el número de puntos por caja para tres valores distintos de la frecuencia  $f'$ . Tomaremos un valor representativo para el índice de escala  $n = \frac{1}{2}N$  donde podremos observar el problema de la inhomogeneidad.

Con  $n = \frac{1}{2}N$ ,  $R = \frac{1}{4}N$  y la relación (3.6) obtenemos  $f' + f'' = \frac{1}{2}$ , por lo tanto  $0 \leq f' \leq \frac{1}{2}$ . Haciendo uso de la relación asintótica (3.9) podemos construir entonces el Cuadro 3.1

	Número de cajas	Número de puntos por caja
$f' = 0$	$\binom{\frac{N}{2}}{0} = 1$	$\binom{\frac{N}{2}}{\frac{N}{2}} \sim \sqrt{\frac{4}{\pi N}} 2^{\frac{N}{2}}$
$f' = \frac{1}{4}$	$\binom{\frac{N}{2}}{\frac{N}{8}} \sim \sqrt{\frac{16}{3\pi N}} 2^{\frac{N}{2}\Delta(\frac{1}{4})}$	$\binom{\frac{N}{2}}{\frac{N}{8}} \sim \sqrt{\frac{16}{3\pi N}} 2^{\frac{N}{2}\Delta(\frac{1}{4})}$
$f' = \frac{1}{2}$	$\binom{\frac{N}{2}}{\frac{N}{4}} \sim \sqrt{\frac{4}{\pi N}} 2^{\frac{N}{2}}$	$\binom{\frac{N}{2}}{0} = 1$

**Tabla 3.1.** Caso con  $f = 1/4$

Observando los datos del cuadro se puede afirmar que a una escala fija dada por  $n = \frac{1}{2}N$  (tamaño de caja igual a  $2s^{\frac{N}{2}-1}$ ) coexisten cajas con las siguientes características<sup>1</sup>:

- Para  $f' = 0$  solo existe una caja con un número de puntos del orden de  $2^{\frac{N}{2}}$ . Es decir, un número enorme de puntos en el espacio ocupado tan solo por una caja, en este caso de tamaño  $2s^{\frac{N}{2}-1}$ .
- Para  $f' = \frac{1}{4}$  tenemos del orden de  $2^{\frac{N}{2}\Delta(\frac{1}{4})}$  cajas con  $2^{\frac{N}{2}\Delta(\frac{1}{4})}$  puntos en cada una.
- Finalmente, para  $f' = \frac{1}{2}$  hay del orden de  $2^{\frac{N}{2}}$  cajas con un punto en cada una. Como vemos, un enorme número de cajas con apenas un punto en cada una.

Todo esto se puede comprender más fácilmente observando el esquema simplificado (Figura 3.6) que describe las situaciones recién expuestas. El esquema es similar al de la Figura 3.2.

Para el caso más general con  $0 < f < \frac{1}{2}$  podemos construir un cuadro análogo al del caso particular con  $f = \frac{1}{4}$ . Aquí también fijaremos la escala en  $n = \frac{1}{2}N$  y en general tendremos  $R = fN$ , con lo cual  $0 \leq f' \leq 2f$ .

Tomaremos así tres valores para  $f'$ , y representaremos el número de cajas y el número de puntos por caja en cada caso.

<sup>1</sup> En adelante ignoramos el factor  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  pues no es importante para el escaleo.

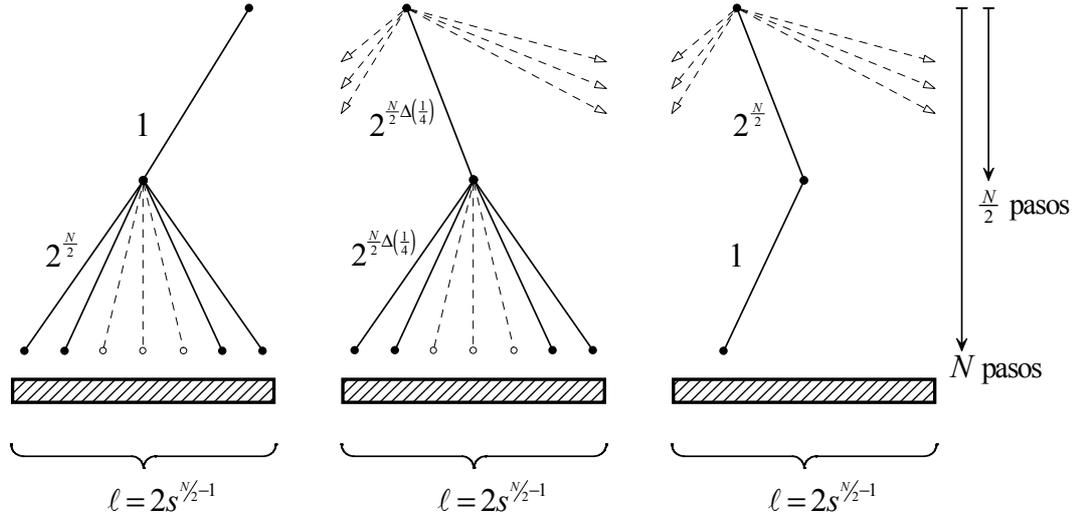


Fig. 3.6. Esquema que muestra tres casos típicos de la estructura para  $N$  pasos y  $f = 1/4$ , a una escala con  $n = \frac{1}{2}N$ . El primero  $f' = 0$ , el segundo  $f' = \frac{1}{4}$  y el último  $f' = \frac{1}{2}$ . Estos esquemas son similares al de la Figura 3.2.

	Número de cajas	Número de puntos por caja
$f' = 0$	$\binom{\frac{N}{2}}{0} = 1$	$\binom{\frac{N}{2}}{2f\frac{N}{2}} \sim \frac{c_1}{\sqrt{N}} 2^{\frac{N}{2}\Delta(2f)}$
$f' = f$	$\binom{\frac{N}{2}}{f\frac{N}{2}} \sim \frac{c_2}{\sqrt{N}} 2^{\frac{N}{2}\Delta(f)}$	$\binom{\frac{N}{2}}{f\frac{N}{2}} \sim \frac{c_2}{\sqrt{N}} 2^{\frac{N}{2}\Delta(f)}$
$f' = 2f$	$\binom{\frac{N}{2}}{2f\frac{N}{2}} \sim \frac{c_1}{\sqrt{N}} 2^{\frac{N}{2}\Delta(2f)}$	$\binom{\frac{N}{2}}{0} = 1$

Tabla 3.2. Caso general con  $0 < f < 1/2$ . Nótese que los valores de las constantes en la tabla son  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi 2f(1-2f)}}$  y  $c_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi f(1-f)}}$ .

Es evidente ahora que los resultados del Cuadro 3.2 generalizan los del caso anterior reafirmando la presencia de una inhomogeneidad.

Sólo nos resta ver que ocurre si el índice de escala  $n$  toma valores pequeños (tamaños de caja  $\ell_n$  muy grandes). Construiremos un cuadro para el caso general con frecuencia  $0 < f < \frac{1}{2}$  ya que éste incluye el caso con  $f = \frac{1}{4}$ . Tomaremos  $n = 2$  como valor para el índice de escala, con lo cual todos los puntos de la estructura para  $N$  pasos estarán contenidos en 4 cajas de tamaño  $\ell_2 = 2s$  resultando así el Cuadro 3.3.

	Número de cajas	Número de puntos por caja
$f' = 0$	$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{N-2}{fN} \cong \binom{N}{fN} \sim \frac{c}{\sqrt{N}} 2^{N\Delta(f)}$
$f' = \frac{1}{2}$	$\binom{2}{1} = 2$	$\binom{N-2}{fN-1} \cong \binom{N}{fN} \sim \frac{c}{\sqrt{N}} 2^{N\Delta(f)}$
$f' = 1$	$\binom{2}{2} = 1$	$\binom{N-2}{fN-2} \cong \binom{N}{fN} \sim \frac{c}{\sqrt{N}} 2^{N\Delta(f)}$

Tabla 3.3. Caso general a escalas grandes ( $n$  pequeño) con  $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi f(1-f)}}$ .

Podemos concluir diciendo que con tamaños de caja grandes ( $n$  pequeño) la estructura resulta homogénea pero progresa gradualmente hacia la inhomogeneidad a medida que los tamaños de caja disminuyen ( $n$  crece). En todas estas apreciaciones siempre consideramos  $N \gg 1$ .

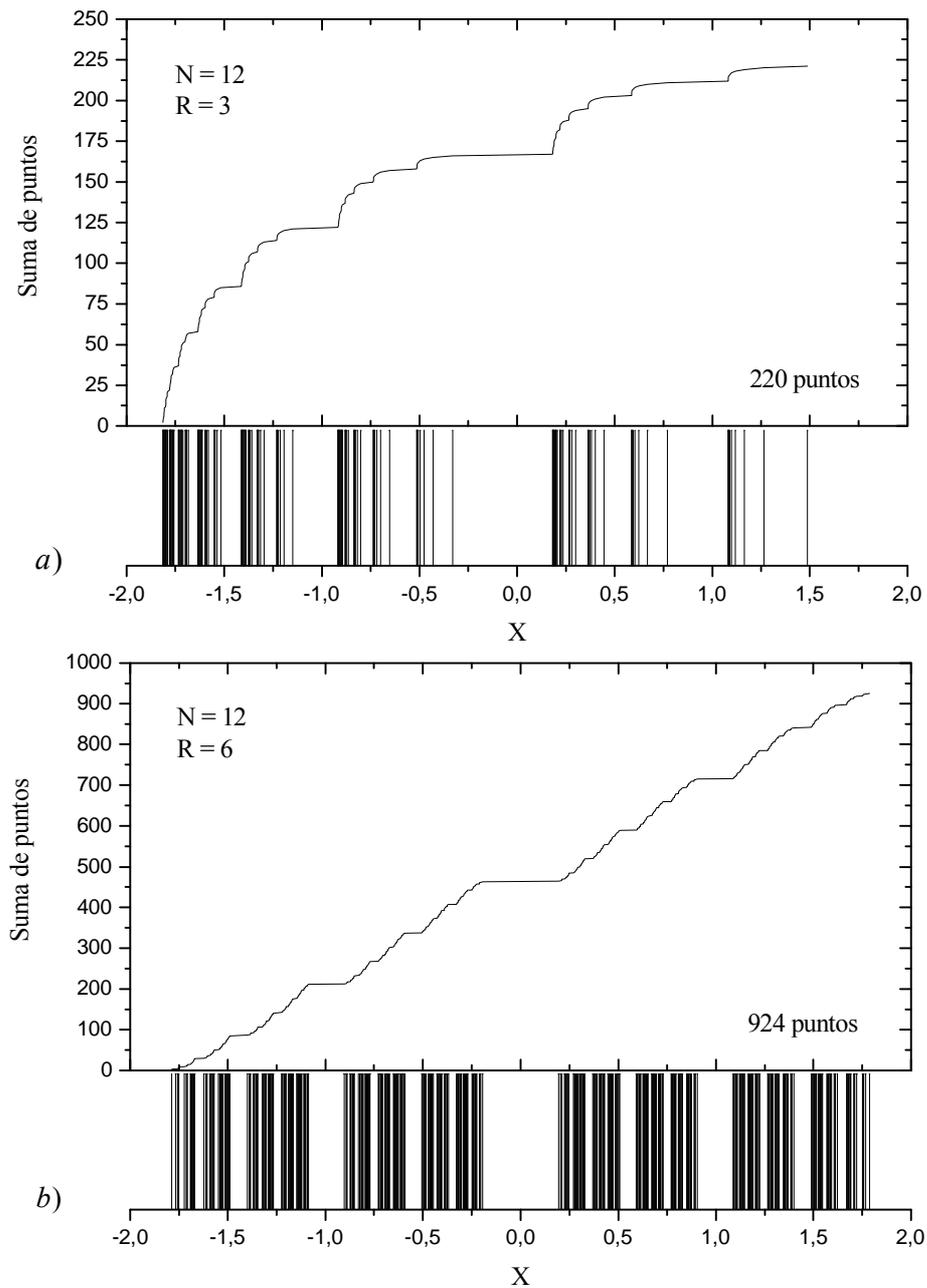
La Figura 3.7 a) muestra un gráfico de barras acompañado de uno de suma de puntos para el caso con  $f = \frac{1}{4}$  donde se puede ver el efecto de la inhomogeneidad en el conjunto de posiciones finales. En estos gráficos cada punto está representado por una barra, lo que resulta más conveniente para visualizar las posiciones de los puntos. Se puede notar que los clusters se ven desprovistos de puntos del lado derecho. Dicho fenómeno se presenta de forma irregular en toda la estructura y en particular se acentúa con tamaños de caja menores.

Finalmente presentamos la Figura 3.7 b) para el caso con  $f = \frac{1}{2}$ . Notemos la presencia de una simetría por reflexión respecto del origen de coordenadas para este caso particular, producto de las transformaciones  $f \rightarrow 1 - f$  y  $X \rightarrow -X$ , estudiadas en la primera sección de este capítulo. Observemos las estructuras de un solo lado, por ejemplo para  $X > 0$ . Los clusters ahora se ven desprovistos de puntos del lado izquierdo o bien del derecho, con irregularidades que se acentúan conforme disminuye el tamaño de caja. Ambas figuras se construyeron tomando  $s = 0,45$ .

### 3.4 Resumen

Hemos visto que, analizando los diferentes elementos geométricos del soporte (gaps, cajas e incluso la estructura completa) existe una equivalencia entre el caso con restricción  $f$  y el caso no restringido en el límite para  $N \gg 1$ .

No ocurre lo mismo con la distribución de puntos sobre estas estructuras. Mientras que el caso sin restricción es completamente homogéneo, es decir que resulta homogéneo a todas las escalas (para todo  $\ell_n$ ); el caso restringido es homogéneo con tamaños de caja muy grandes y progresa gradualmente hacia la inhomogeneidad al disminuir el tamaño de caja.



**Fig. 3.7.** En ambos casos  $s = 0,45$ . Cada punto está representado por una barra, lo que resulta más conveniente para visualizar las posiciones de los mismos.

a) Gráfico de barras y suma de puntos que representa el caso con  $f = \frac{1}{4}$ . La caminata consta de  $N = 12$  pasos con  $R = 3$  a la derecha.

b) Gráfico de barras y suma de puntos para el caso con  $f = \frac{1}{2}$ . La caminata ahora tiene  $N = 12$  pasos con  $R = 6$  a la derecha.

## 4. Invariancia de escala. Gráfico de la función de conteo de cajas

### 4.1 Consideraciones Generales

Las leyes de potencia juegan un papel central en el estudio de los fractales [3]. Por ejemplo, para el caso sin restricción [1] la ley de potencia viene dada por

$$M_n = c \ell_n^{-D_B}$$

y tiene una importante invariancia que se puede expresar a partir de

$$M_{n+1} = c \ell_{n+1}^{-D_B} = c (s\ell_n)^{-D_B} = s^{-D_B} M_n \quad (4.1)$$

Esta última describe la invariancia de escala de  $M_n$  (la ley de potencia tiene la misma forma en todas las escalas).

En nuestro caso probaremos que el conjunto con restricción no posee invariancia de escala, es decir que la función  $\ln M_n$  versus  $\ln\left(\frac{1}{\ell_n}\right)$  ya no será lineal.

Como ya hemos visto en el capítulo anterior podemos expresar el número de cajas de tamaño  $\ell_n = 2s^{n-1}$  como  $M_n = \sum_{r=r_{\min}}^{r_{\max}} \binom{n}{r}$  cada una conteniendo  $\binom{N-n}{R-r}$  puntos. Entonces, escribiremos en adelante  $M_n = \sum_{f'=f'_{\min}}^{f'_{\max}} \binom{n}{f'n}$ , con  $f'_{\min} = \frac{r_{\min}}{n}$  y  $f'_{\max} = \frac{r_{\max}}{n}$  y con  $r_{\min}$  y  $r_{\max}$  que satisfacen (3.6).

### 4.2 Análisis basado en dos valores del índice de escala

Podemos mostrar la pérdida de invariancia de escala para el caso con  $f = \frac{1}{4}$ , observando el escaleo de la función  $M_n$  para dos valores típicos del índice de escala,  $n = \frac{N}{2}$  y  $n = N - 1$ . Recordemos que en este caso  $N$  debe ser múltiplo de 4, para evitar inconsistencias como la aparición de cantidades no enteras de pasos.

De la expresión (3.6) obtenemos para nuestro caso con  $n = \frac{N}{2}$  y  $f = \frac{1}{4}$ ,  $f' + f'' = \frac{1}{2}$  entonces,  $f'_{\min} = 0$  y  $f'_{\max} = \frac{1}{2}$ . La suma a continuación es el la mitad del área de la función binomial resultando así,

$$M_{\frac{N}{2}} = \sum_{f'=0}^{1/2} \binom{\frac{N}{2}}{f'\frac{N}{2}} \sim \frac{1}{2} 2^{\frac{N}{2}} \quad (4.2)$$

Ahora, para  $n = N - 1 \cong N$  resultan  $f'_{\min} = \frac{\frac{N}{4}-1}{N-1}$  y  $f'_{\max} = \frac{\frac{N}{4}}{N-1}$  por consiguiente, usando la Identidad de Pascal [8] y (3.9) con  $f = \frac{1}{4}$

$$M_N = \binom{N-1}{\frac{N}{4}-1} + \binom{N-1}{\frac{N}{4}} = \binom{N}{\frac{N}{4}} \sim \sqrt{\frac{8}{3\pi N}} 2^{N\Delta(\frac{1}{4})} \quad (4.3)$$

Las escalas correspondientes son  $\ell_n \sim s^{\frac{N}{2}}$  y  $\ell_n \sim s^N$ .

Analizaremos a continuación como escalen algunos de los términos de la suma (4.2) y como se relacionan con nuestro problema. Usaremos datos del Cuadro 3.1 que corresponden a nuestro caso. También conviene, como guía para lo que sigue, observar los esquemas de la Figura 3.6 para cada caso.

La Figura 4.1 muestra tres puntos del escaleo comparados con la *recta de invariancia*, la que hipotéticamente seguiría un conjunto trivial con ley de potencia. En esta Figura la *recta de referencia* se usa como indicativo de la pérdida de invariancia de escala. Verdaderamente los puntos (1') y (2) quedan unidos por una curva suave como se vera más adelante.

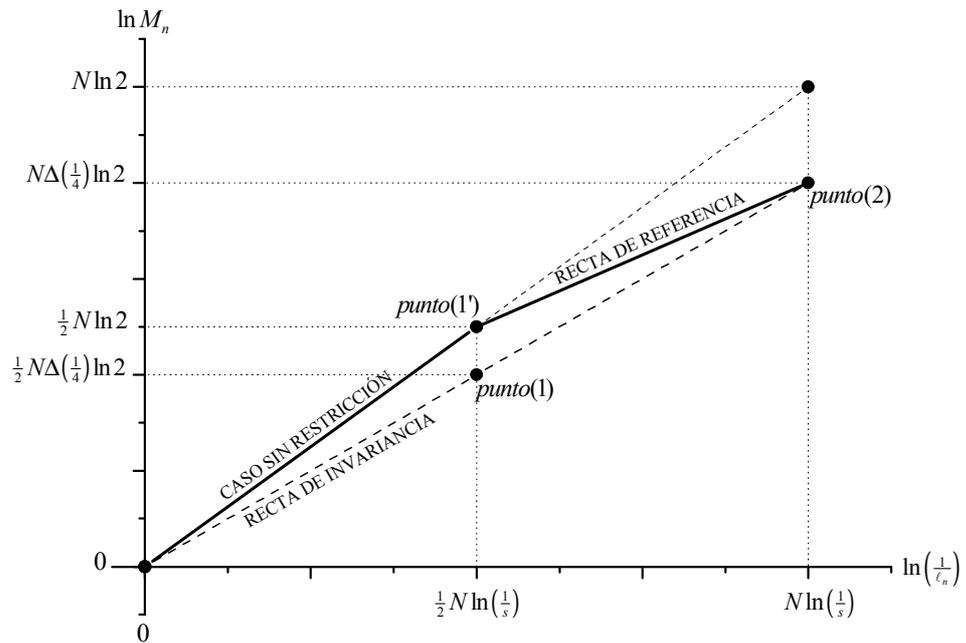


Fig. 4.1. Esquema que muestra la curva verdadera para  $f = \frac{1}{4}$  como una línea quebrada. El primer tramo sigue la recta del *caso sin restricción*, mientras que el segundo se indica como *recta de referencia*.

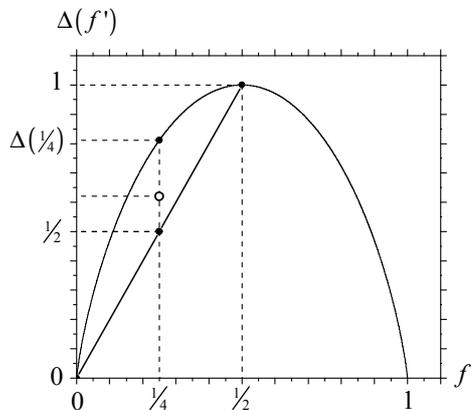


Fig. 4.2. La función  $\Delta(f')$  evaluada en  $f = \frac{1}{4}$ . Se ve claramente que  $\Delta(\frac{1}{4}) > \frac{1}{2}$ . El punto vacío representa la pendiente de la *recta de referencia*.

	Número de cajas	Número de puntos por caja
$f' = 0$	$\binom{fN}{0} = 1$	$\binom{N-fN}{fN} \sim \frac{c_2}{\sqrt{N}} 2^{(1-f)N\Delta(\frac{f}{1-f})}$
$f' = f$	$\binom{fN}{fN} \sim \frac{c_1}{\sqrt{N}} 2^{fN\Delta(f)}$	$\binom{N-fN}{f(N-fN)} \sim \frac{c_3}{\sqrt{N}} 2^{(1-f)N\Delta(f)}$
$f' = 1$	$\binom{fN}{fN} = 1$	$\binom{N-fN}{0} = 1$

**Tabla 4.1.** Tres términos de la suma para el caso con  $0 < f < 1/2$ . Las constantes en las expresiones de la tabla son  $c_1 = \frac{1}{f\sqrt{2\pi(1-f)}}$ ,  $c_2 = \sqrt{\frac{1-f}{2\pi f(1-2f)}}$  y  $c_3 = \frac{1}{(1-f)\sqrt{2\pi f}}$ .

- Para el término con  $f' = 1/2$  existen del orden de  $2^{\frac{N}{2}}$  cajas con un punto en cada una, mientras que para  $f' = 1/4$  tenemos  $2^{\frac{N}{2}\Delta(\frac{1}{4})}$  cajas con  $2^{\frac{N}{2}\Delta(\frac{1}{4})}$  puntos por caja. Pero como  $1 > \Delta(\frac{1}{4})$  (ver Figura 4.2) resulta  $2^{\frac{N}{2}} \gg 2^{\frac{N}{2}\Delta(\frac{1}{4})}$ . Aunque las  $2^{\frac{N}{2}}$  cajas solo contengan un punto se deben tomar en cuenta al evaluar  $M_n$  con  $\ell_n \sim s^{\frac{N}{2}}$ . Si consideramos las cajas necesarias para cubrir la mayoría de los puntos (a una escala  $\ell_n \sim s^{\frac{N}{2}}$ ) la curva pasa por el *punto(1')* como se puede ver en la Figura 4.1. Esto resulta de la suma (4.2).
- Analicemos el número total de puntos, que sabemos que son del orden de  $2^{N\Delta(\frac{1}{4})}$ . Del gráfico de la Figura 4.2 vemos que  $\Delta(\frac{1}{4}) > \frac{1}{2}$ , entonces  $2^{N\Delta(\frac{1}{4})} \gg 2^{\frac{N}{2}}$ . Si sólo nos interesara analizar el número total de puntos, entonces podríamos eliminar los  $2^{\frac{N}{2}}$  puntos asociados con estas cajas; pero no podemos eliminar las cajas de tamaño  $\ell_n \sim s^{\frac{N}{2}}$  que corresponden a estos puntos sin alterar el escaleo.
- Si en  $M_n$  (a una escala  $\ell_n \sim s^{\frac{N}{2}}$ ) solo consideramos cajas con  $f' = \frac{1}{4}$  obtendríamos un gráfico que pasa por el *punto(1)* como se ve en la Figura 4.1. Tendríamos entonces invariancia de escala puesto que la curva  $\ln M_n$  en función de  $\ln\left(\frac{1}{\ell_n}\right)$  seguiría una recta con pendiente igual a  $-\frac{\ln 2}{\ln s}\Delta(\frac{1}{4})$ . En la misma figura se denomina *recta de invariancia* la que cumple con esta condición. Dicho de otra forma, para que sea un fractal regular o estándar solo tendría que haber  $2^{\frac{N}{2}\Delta(\frac{1}{4})}$  cajas con  $2^{\frac{N}{2}\Delta(\frac{1}{4})}$  puntos por caja a una escala  $\ell_n \sim s^{\frac{N}{2}}$ .
- El *punto(2)* del gráfico de la Figura 4.1 corresponde al escaleo de  $\ln M_n$  (con una escala  $\ell_n \sim s^N$ ) en la formula para la suma (4.3). Serían del orden de  $2^{N\Delta(\frac{1}{4})}$  puntos cubiertos con  $2^{N\Delta(\frac{1}{4})}$  cajas de longitud  $\ell_n \sim s^N$ .

Como todos los términos de la suma (4.2) que toman valores muy grandes son de la forma  $2^{\frac{N}{2}\Delta(f')}$  con  $0 < f' < 1/2$ , el término que domina la misma será el valor de  $f'$  que maximice la curva  $\Delta(f')$  de la Figura 4.2. Este valor es  $f' = 1/2$ .

Veremos a continuación que para el caso más general con  $0 < f < \frac{1}{2}$  todo lo visto se repite. Tomaremos ahora  $n = fN$ ,  $n = N - 1 \cong N$  y usaremos datos del Cuadro 4.1.

La Figura 4.3 generaliza el resultado obtenido en el caso  $f = \frac{1}{4}$ .

Todo lo visto hasta aquí es suficiente para asegurar que no existe en general invariancia de escala, en particular a escalas del orden de  $s^N$  y siempre que  $0 < f < \frac{1}{2}$ .

El único caso invariante puede obtenerse evaluando en las formulas del caso general el limite para  $f \rightarrow \frac{1}{2}$ . Como resultado de esta operación los puntos marcados como *punto(1')* y *punto(1)* en la Figura 4.3 colapsan en uno solo y la curva  $\ln M_n$  versus  $\ln\left(\frac{1}{\ell_n}\right)$  se convierte en una recta. Obsérvese que, además la *recta de invariancia* se superpone con la del *caso sin restricción*.

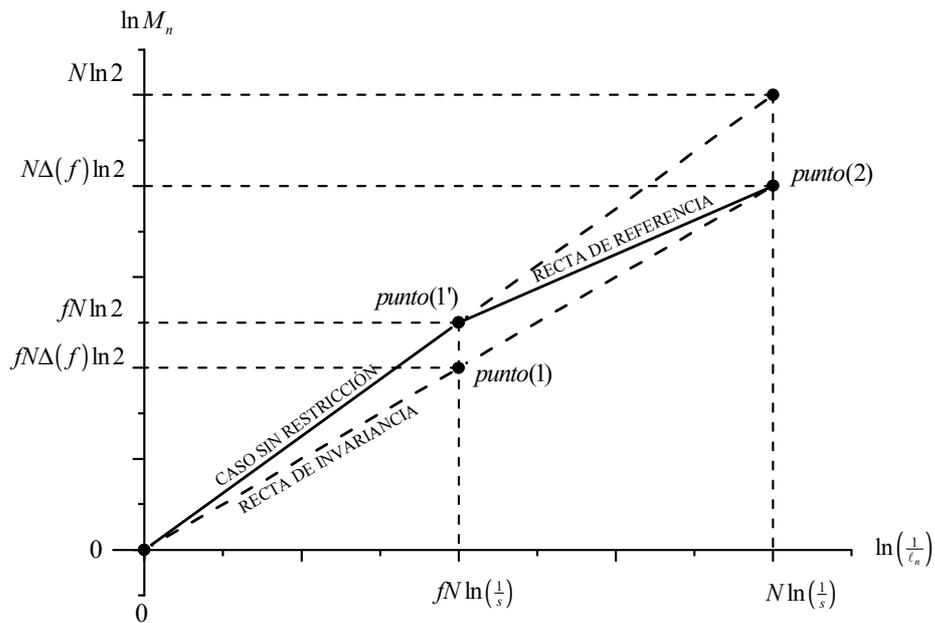


Fig. 4.3. Esquema para el caso más general con  $0 < f < \frac{1}{2}$ . Para el caso con  $f \rightarrow \frac{1}{2}$ ,  $\Delta(f) \rightarrow 1$  (ver Figura 4.2) y resulta que la recta del *caso sin restricción* colapsa con la *recta de invariancia*.

### 4.3 El límite de escalas pequeñas con $0 < f \leq 1/2$

Si bien tenemos una idea más clara del comportamiento de la función de conteo de cajas, conviene ver si este comportamiento se mantiene para otros valores de los parámetros. En particular, con tamaños de caja pequeños podremos evaluar la dimensión de conteo de cajas.

Supongamos en principio que

$$\begin{aligned} m &= Cte. \\ m &\ll n \\ N &\gtrsim n \gg 1 \end{aligned}$$

lo cual nos será útil luego para evaluar el límite  $\ell_n \rightarrow 0$  (la constante  $m$  es un número suficientemente grande). A partir de (3.4) y (3.6) obtenemos

$$f' = \frac{fN - m}{N - m}, \frac{fN - m + 1}{N - m}, \dots, \frac{fN}{N - m} \quad (4.4)$$

y

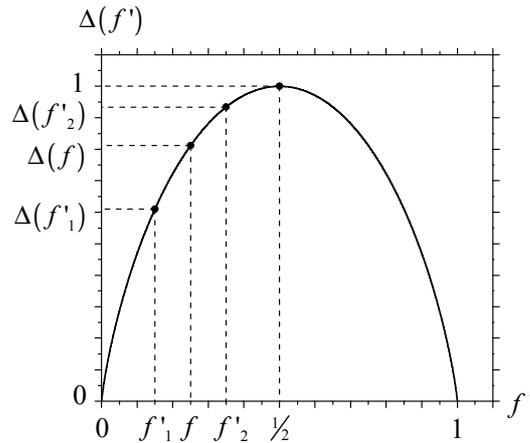
$$f'' = \frac{0}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m}{m} \quad (4.5)$$

En la Figura 3.2 sólo basta tomar  $n \gg 1$  manteniendo  $m = Cte.$  para evaluar el límite cuando  $\ell_n \rightarrow 0$ . Comenzaremos por buscar cotas para las frecuencias  $f'$  de la suma, utilizando datos del gráfico de la Figura 4.4.

Los valores de cota inferior  $f'_1$  y superior  $f'_2$  cumplirán con  $f'_1 < f < f'_2$ , entonces obtendremos  $\Delta(f'_1) < \Delta(f) < \Delta(f'_2)$ .

La secuencia de valores (4.4) puede expresarse

$$f' = \frac{f - \frac{m}{N}}{1 - \frac{m}{N}}, \frac{f - \frac{m-1}{N}}{1 - \frac{m}{N}}, \dots, \frac{f}{1 - \frac{m}{N}}$$



**Fig. 4.4.** La función  $\Delta(f')$  puede ser utilizada para hallar cotas de la función de conteo de cajas  $M_n$ . Las cotas  $f'_1$  y  $f'_2$  encierran todos los posibles valores de  $f'$  que barre la suma, y el valor de frecuencia  $f$  de toda la estructura.

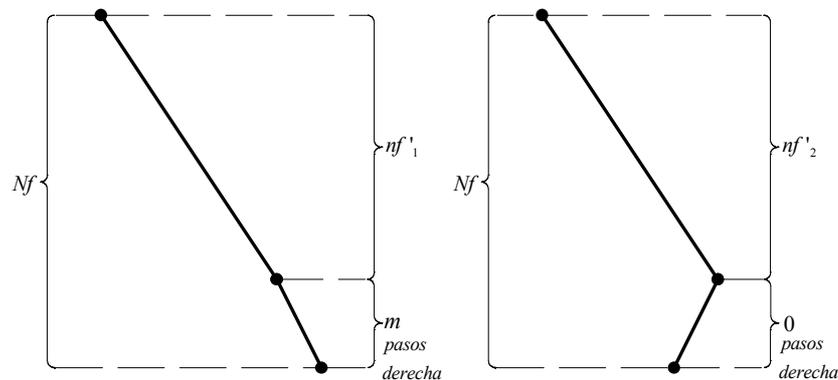
y en el límite para  $N \gg 1$  tienden a un único valor  $f$ . Entonces aproximaremos  $f'_1$  y  $f'_2$  como sigue. Si tomamos  $f'' = 1$  obtenemos de (3.6)  $f' = \frac{N}{n}f - \frac{m}{n}$  y podemos definir

$$f'_1 \equiv \frac{N}{n}f - \frac{m}{n} \tag{4.6}$$

De la misma forma, para  $f'' = 0$  se obtiene de (3.6)  $f' = \frac{N}{n}f$  y definimos

$$f'_2 \equiv \frac{N}{n}f \tag{4.7}$$

Se puede verificar fácilmente que ambos cumplen con  $f'_1 < f < f'_2$ . De (4.6) y (4.7) vemos que para  $nf'_1 + m = Nf$  se dan  $m$  pasos a la derecha, mientras que para  $nf'_2 = Nf$  no se da ningún paso a la derecha. Conviene aquí, ver la Figura 4.5 para ambos casos.



**Fig. 4.5.** Representación gráfica de las cotas para las frecuencias  $f'_1$  y  $f'_2$ . Siempre que  $m = Cte.$ ,  $m \ll N$  y  $N \gtrsim n \gg 1$ .

Veremos a continuación una forma más económica de expresar  $f'_1$  y  $f'_2$  que nos permita evaluar el límite en forma intuitiva. Comenzamos por escribir

$$f'_1 = \left( \frac{1}{1 - \frac{m}{N}} \right) \left( f - \frac{m}{N} \right)$$

$$f'_2 = \left( \frac{1}{1 - \frac{m}{N}} \right) f$$

y usamos  $\frac{1}{1 - \frac{m}{N}} \cong 1 + \frac{m}{N}$  pues  $\frac{m}{N} \ll 1$ , entonces nos queda, luego de despreciar terminos de segundo orden

$$f'_1 \cong f - \frac{m}{N} (1 - f) \tag{4.8}$$

$$f'_2 \cong f + \frac{m}{N} f \tag{4.9}$$

Se ve claramente que ambos tienden a  $f$  si  $N \gg 1$ ; entonces nos quedaremos con estas últimas expresiones.

En el siguiente ejemplo evaluaremos la pendiente de la curva  $\ln M_n$  vs.  $\ln \frac{1}{\ell_n}$  en la región de convergencia, que correspondería al valor de la dimensión buscada y apelando a una primera aproximación. Esto nos conducirá a un valor erróneo de la misma. En la Figura 4.6 se da una idea esquemática de la convergencia.

Recordemos que las condiciones en las que evaluamos el límite son  $m = Cte.$ ,  $n \gg m$ ,  $N \gtrsim n \gg 1$  y que la pendiente aproximada de la Figura 4.6 corresponde a la línea en trazo grueso.

Dado que las cotas calculadas para  $f'$  tienden a  $f$  podemos efectuar el escaleo de los términos involucrados usando la aproximación asintótica (3.9), resultando

$$M_N \sim \frac{2^{N\Delta(f)}}{\sqrt{N}}$$

$$M_n \sim \frac{2^{n\Delta(f)}}{\sqrt{n}}$$

con las escalas correspondientes

$$\ell_N \sim s^N$$

$$\ell_n \sim s^n$$

Efectuando el cociente y aproximando por la relación  $\sqrt{1 - \frac{m}{N}} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{m}{N}$  obtenemos

$$\frac{M_N}{M_n} \cong 2^{m\Delta(f)} \sqrt{1 - \frac{m}{N}} \cong 2^{m\Delta(f)} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{m}{N} \right)$$

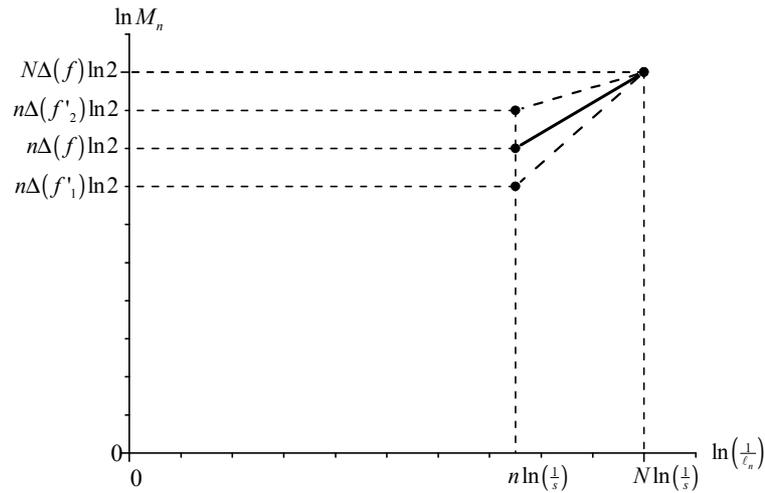
Usamos la aproximación  $\ln \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{m}{N} \right) \cong -\frac{1}{2} \frac{m}{N}$  en el logaritmo del cociente y finalmente nos queda

$$\Delta y = \ln \frac{M_N}{M_n} \cong m\Delta(f) \ln 2 - \frac{1}{2} \frac{m}{N}$$

$$\Delta x = m \ln \frac{1}{s}$$

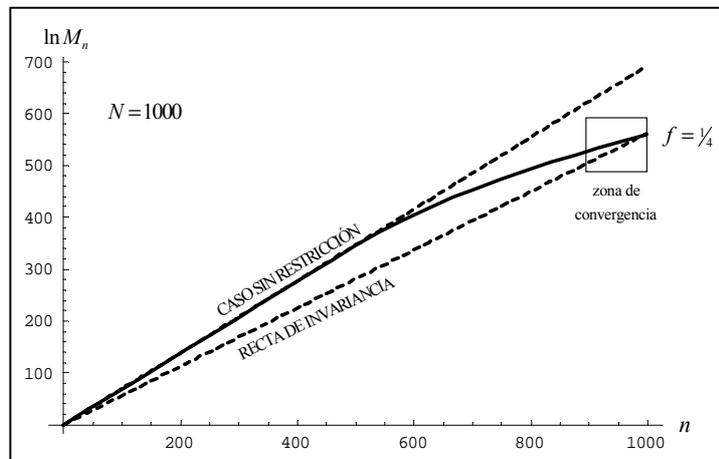
Evaluamos la dimensión por el cociente de ambas cantidades y obtenemos con  $N \gg 1$

$$D_B \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{s}} \Delta(f) + \frac{1}{2N} \frac{1}{\ln s} \tag{4.10}$$



**Fig. 4.6.** Esquema que muestra los puntos involucrados en el análisis de la convergencia de  $M_n$ .

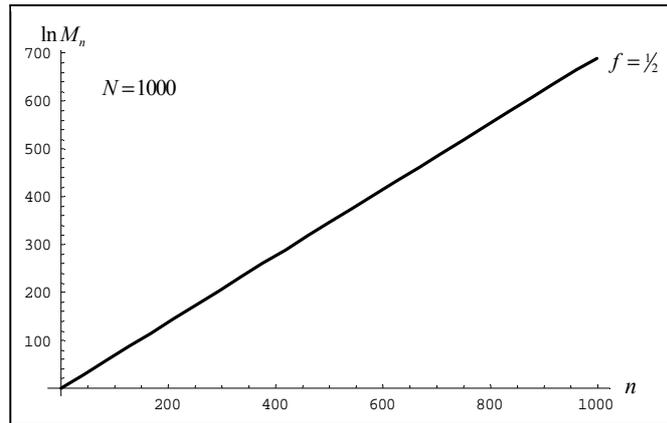
Mostramos dos gráficos como ejemplo de todo lo visto; la Figura 4.7 corresponde al caso con  $f = \frac{1}{4}$  mientras que la Figura 4.8 es para el caso con  $f = \frac{1}{2}$ . Ambos son representaciones exactas del logaritmo de la función de conteo de cajas, construidas con el programa **Matemática 5.2** y evaluando  $N = 1000$  pasos.



**Fig. 4.7.** La curva de escaleo  $\ln M_n$  en función de  $n$  en trazo grueso. El caso corresponde a  $f = \frac{1}{4}$  y se muestra la región de convergencia, es decir donde  $n \rightarrow N$  y la curva corta la *recta de invariancia*.

Hasta aquí el valor en la fórmula (4.10) parecería resolver nuestro problema, es decir que obtendríamos  $D_B = -\frac{\ln 2}{\ln s} \Delta(f)$  con  $0 < f < 1/2$ . Notemos aquí que el valor obtenido coincide además con la pendiente de la *recta de invariancia*. Sin embargo, este valor fue obtenido a partir de una primera aproximación en la cual no se usó el escaleo de  $M_n$  a partir de su término dominante, como se hará en la siguiente aproximación.

Del gráfico de la Figura 4.7 se puede apreciar que la pendiente en la región de convergencia debe ser más pequeña que el valor obtenido.



**Fig. 4.8.** El caso invariante con  $f = \frac{1}{2}$ , donde la recta del *caso sin restricción* y la *recta de invariancia* colapsan.

Con un simple cálculo probaremos esto. Volviendo al ejemplo con  $f = 1/4$  y calculando la pendiente de la *recta de referencia* a partir de los datos del gráfico de la Figura 4.1 obtenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{N \Delta \left(\frac{1}{4}\right) \ln 2 - \frac{N}{2} \ln 2}{N - \frac{N}{2}} \cong 0,43$$

Dado que la pendiente de la *recta de referencia* actúa como una cota superior para la pendiente de la curva  $\ln M_n$  a pequeñas escalas vemos que nuestro valor queda verdaderamente muy por debajo del obtenido de la fórmula  $\Delta \left(\frac{1}{4}\right) \ln 2 \cong 0,56$  como se ve en la Figura 4.2. Esto se puede generalizar a otros valores de  $f$ .

Evaluaremos a continuación la pendiente para el caso límite con  $m = Cte.$ ,  $n \gg m$  y  $N \gtrsim n \gg 1$ . Como todos los términos de la suma  $M_n$  que toman valores muy grandes son de la forma  $2^{n\Delta(f')}$  con  $f'_1 < f < f'_2$ , el término que domina la misma será el valor de  $f'$  que maximice la curva  $\Delta(f')$  de la Figura 4.4 Este valor es  $f' = f'_2$ .

Escribimos a continuación los términos usando datos de la Figura 4.6,

$$M_N \sim \frac{2^{N\Delta(f)}}{\sqrt{N}}$$

$$M_n \sim \frac{2^{n\Delta(f'_2)}}{\sqrt{n}}$$

y efectuamos el cociente recordando que  $n + m = N$  y  $f'_2 = f + \frac{m}{N}f$

$$\frac{M_N}{M_n} \cong 2^{m\Delta(f) - n\delta} \sqrt{1 - \frac{m}{N}}$$

En este caso aproximamos la derivada de la función  $\Delta(f')$  como  $\left. \frac{\partial \Delta(f')}{\partial f'} \right|_{f'=f} \cong \frac{\delta}{f'_2 - f}$ , donde  $\delta = \Delta(f'_2) - \Delta(f)$ . Finalmente nos queda que

$$\delta = -\frac{m}{N} \frac{f}{\ln 2} \ln \left( \frac{f}{1-f} \right)$$

Si además utilizamos la aproximación,  $\sqrt{1 - \frac{m}{N}} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{m}{N}$  podemos reescribir el cociente como

$$\frac{M_N}{M_n} \cong 2^m [\Delta(f) + \frac{f}{\ln 2} \ln(\frac{f}{1-f})] \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m}{N}\right)$$

Aplicando logaritmos nos queda finalmente

$$\Delta y = \ln \frac{M_N}{M_n} \cong m \left[ \Delta(f) + \frac{f}{\ln 2} \ln \left(\frac{f}{1-f}\right) \right] + \ln \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m}{N}\right) \cong -m \ln(1-f) - \frac{1}{2} \frac{m}{N}$$

Si ahora realizamos el logaritmo del cociente de las escalas obtenemos

$$\Delta x = N \ln \frac{1}{s} - n \ln \frac{1}{s} = m \ln \frac{1}{s}$$

Podemos escribir todo junto para evaluar la dimensión  $D_B$  como la pendiente (positiva) buscada en el límite para  $N \gg 1$

$$D_B = \frac{\ln \frac{M_N}{M_n}}{m \ln \frac{1}{s}} \cong \frac{\ln(1-f)}{\ln s} + \frac{1}{2N} \frac{1}{\ln s} \tag{4.11}$$

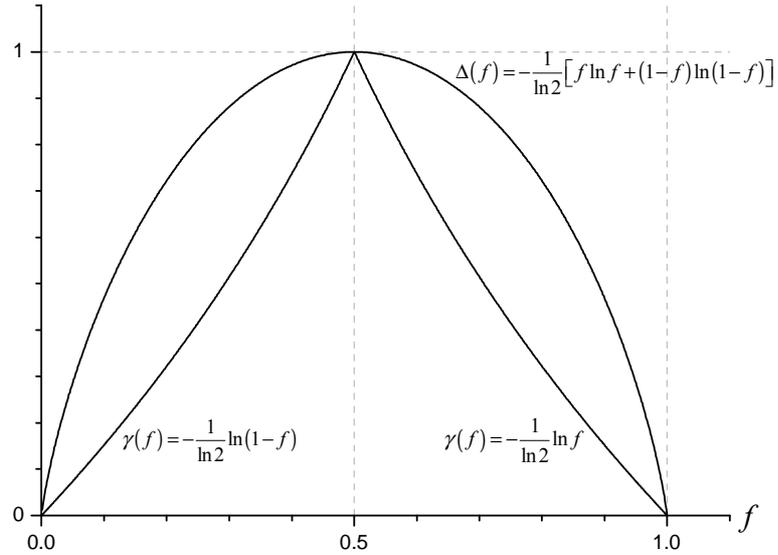
notando que este resultado no depende de  $m$ , es decir que para valores de  $m$  más pequeños el exponente sería el mismo.

Podemos llamar  $\gamma(f) = -\frac{1}{\ln 2} \ln(1-f)$  y escribir

$$D_B = -\frac{\ln 2}{\ln s} \gamma(f)$$

valido para  $0 < f < 1/2$  y  $0 < s < 1/2$ .

Usando la simetría  $f \rightarrow 1-f$  resulta  $D_B = -\frac{\ln 2}{\ln s} \gamma(1-f)$  para  $1/2 < f < 1$  y  $0 < s < 1/2$ . Todo junto en un mismo grafico se muestra en la Figura 4.9. Notese que si  $f \rightarrow 1/2$  entonces  $D_B = -\frac{\ln 2}{\ln s}$  que corresponde a la dimensión del sustrato.



**Fig. 4.9.** Comparativa entre la función  $\Delta(f)$  y  $\gamma(f)$ . La última determina una jerarquía de exponentes multifractales.

### 4.4 Discusión sobre la dimensión de conteo de cajas

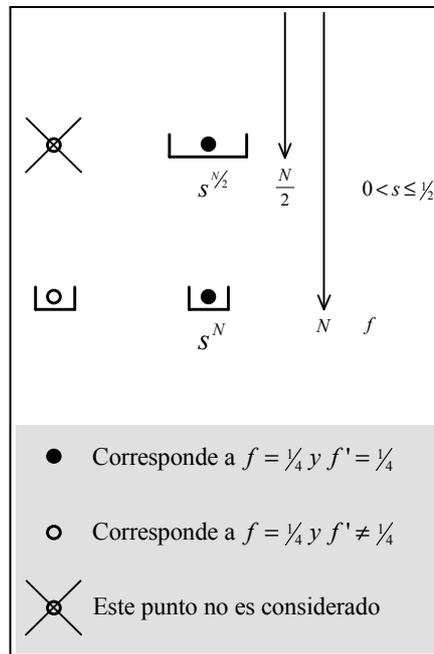
La dimensión fractal  $D_B$  que hemos calculado corresponde a la siguiente; nos fijamos en la ubicación espacial de las posiciones de llegada del caminante después de  $N$  pasos para un dado valor de  $f$ . A esa distribución de puntos le sacamos una fotografía. Luego analizamos la distribución espacial de puntos a distintas escalas. Para ello cubrimos los puntos de la fotografía con cajas de distinto tamaño. Un ejemplo esquemático se muestra en la Figura 4.10. La fotografía después de  $N$  pasos contiene a los puntos  $\bullet$  y  $\circ$ .

Para el calculo de  $D_B$ , ambos puntos son tenidos en cuenta, tanto a una escala del orden de  $s^N$  como a una escala  $s^{N/2}$ .

Pero también podríamos haber definido la dimensión del número total de puntos  $D_P$  para un dado valor de  $f$ , de la siguiente manera. A una determinada escala  $s^n$  nos fijamos en todos los puntos de  $n$  pasos correspondientes a dicho valor de  $f$ , y los cubrimos con cajas de tamaño  $s^n$ . De esta manera el número de cajas será  $M_n \sim 2^{n\Delta(f)}$ . Dicho de otra manera, en el ejemplo ilustrativo de la Figura 4.10, a una escala  $s^{N/2}$ , solo nos fijamos en los puntos con  $f = 1/4$ . De esta forma se obtiene para un caso general que (ver Figura 4.9)  $D_P = -\frac{\ln 2}{\ln s} \Delta(f)$ .

En la Figura 4.9 la curva que corresponde a  $\Delta(f)$  estaría asociada con el exponente  $D_P$  mientras que  $\gamma(f)$  se corresponde con  $D_B$ .

En la bibliografía, [3],[4] para el estudio de problemas similares al nuestro usualmente se utiliza la dimensión  $D_P$ . Una de las contribuciones del presente trabajo ha sido el cálculo de  $D_B$ .

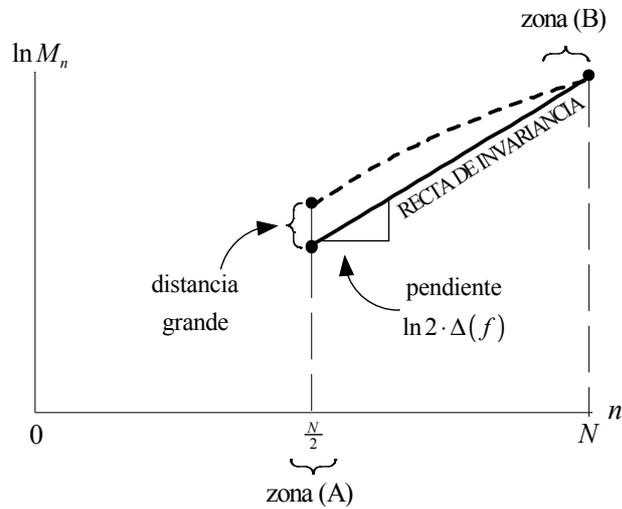


**Fig. 4.10.** El punto  $\circ$  no es considerado para el cálculo de la dimensión  $D_P$  cuando trabajamos a una escala del orden de  $s^{N/2}$ . Para el calculo de  $D_B$ , ambos puntos son considerados, ya sea a una escala  $s^N$  como a  $s^{N/2}$ .

### 4.5 Resumen

Podemos describir dos comportamientos distintos para dos escalas bien diferenciadas:

- (A) Para el caso con  $n = \frac{N}{2}$  y  $n \cong N$  tenemos escalas entre  $s^{\frac{N}{2}}$  y  $s^N$ , cuya separación es apreciable. Aquí la distancia entre el punto de la curva  $\ln M_n$  y la *recta de invariancia* para  $n = \frac{N}{2}$  es siempre muy grande, aun si  $N \gg 1$  (ver Figura 4.11).
- (B) El caso límite con  $m = Cte.$ ,  $m \ll n$  y  $N \gtrsim n \gg 1$ , deja las escalas  $s^n$  y  $s^N$  cada vez mas próximas entre si. En esta instancia la curva  $\ln M_n$  corta a la *recta de invariancia*, aunque sus respectivas pendientes difieren apreciablemente, aún para  $N \gg 1$ . Se puede ver que la dimensión  $D_B$  coincide con la pendiente de la curva  $\ln M_n$  en el último tramo, es decir  $D_B = -\frac{\ln 2}{\ln s} \gamma(f)$  lo que se puede entender mejor observando el esquema de la Figura 4.11.



**Fig. 4.11.** Esquema que presenta las dos regiones de interes que describen el comportamiento de la función  $\ln M_n$  (en línea de trazos) comparada con la *recta de invariancia* (en línea gruesa). Notese que sobre el eje de abscisas se hizo un reescalo en el factor  $\ln(\frac{1}{s})$ .

Por un lado para  $f = 1/2$  el conjunto mantiene la invariancia de escala, y el comportamiento es idéntico al del conjunto sin restricción; de hecho, la curva  $\ln M_n$  es igual a la del caso sin restricción.

Por otro lado, se puede concluir que si  $0 < f < 1/2$  la invariancia se destruye. En la zona (A) la estructura no parece diferir del caso sin restricción; esto se debe a que todos los términos de la suma  $M_n$  que toman valores muy grandes son de la forma  $2^{n\Delta(f')}$  con  $0 < f' < f'_{\max}$ , por lo tanto el término que domina la misma será el valor de  $f'$  que maximice la curva  $\Delta(f')$ . A escalas del orden de  $s^{\frac{N}{2}}$  este valor es siempre  $f' = 1/2$ , manteniendose así la propiedad de invariancia de escala. Pero en la zona (B) el rango  $f'_{\min} < f' < f'_{\max}$  deja de incluir el valor  $f' = 1/2$ , y el término que domina pasa a ser  $f'_{\max}$ . Sabemos que en esta región,  $f'_{\max} \rightarrow f$ , por lo tanto el exponente que domina la suma decrece monótonamente. Esto explica la curvatura de la función  $\ln M_n$  en la zona (B). Además la dependencia de la dimensión  $D_B$  con el valor  $f$ , se entiende como un conjunto de exponentes multifractales [2].

El uso de las simetrías nos permite extender estos resultados a otros valores de los parámetros  $s$  y  $f$ .

## 5. Conclusiones

Si bien los resúmenes de cada capítulo contienen en gran medida muchos de los resultados del análisis de las estructuras de puntos; reservamos para esta sección los resultados más importantes. Vale la pena recordar aquí, que gran parte de las conclusiones se pueden extender al resto de los casos con el uso de las simetrías de los parámetros  $s$  y  $f$ . Por lo tanto, solo nos concentraremos en los casos con  $0 < s \leq 1$  y  $0 < f \leq 1/2$ .

Hemos probado que el sustrato (o soporte) del conjunto con restricción no cambia respecto del conjunto sin restricción. Recordando el “diagrama de fases” es fácil concluir de todo esto, que se mantienen los regímenes de difusión atenuada con dominio acotado y el de difusión amplificada con dominio no acotado. También se presenta solapamiento de estructuras cuando se varía el factor de paso de  $s < 1/2$  a  $s \geq 1/2$ .

Las condiciones usuales para que una estructura de puntos pueda calificarse con el término *fractal* son [3] [4]:

- Un exponente, proveniente del escaleo de la función de conteo de cajas, llamado *dimensión boxcounting*  $D_B$ .
- La propiedad de *invariancia de escala* del conjunto, es decir que la ley de potencia es la misma a todas las escalas.

Puede que se cumpla una sola de ellas o bien ambas. Ya hemos visto que en el caso general con  $0 < s < 1/2$  y  $0 < f < 1/2$  el conjunto de posiciones finales no mantiene la invariancia de escala. Sin embargo podemos calcular el exponente a partir del valor de la pendiente de la curva  $\ln M_n$ . Utilizando los resultados de la sección previa, con  $0 < f < 1/2$  tenemos

$$D_B = -\frac{\ln 2}{\ln s} \gamma(f)$$

para el caso con  $m = Cte.$ ,  $m \ll n$  y  $N \gtrsim n \gg 1$ . Siendo  $\gamma(f) = -\frac{1}{\ln 2} \ln(1-f)$  la función definida en la sección anterior.

Este caso verifica sólo una de las propiedades, la existencia de dimensión. Por supuesto el soporte tiene dimensión  $D_B = -\frac{\ln 2}{\ln s}$ .

El caso con  $f = 1/2$  y  $0 < s < 1/2$  es el único que cumple con las dos condiciones. De hecho la dimensión de conteo de cajas de este conjunto  $D_B = -\frac{\ln 2}{\ln s}$  coincide con la del caso sin restricción.

Se hace un análisis detallado de la distribución espacial de los puntos de llegada del caminante aleatorio con paso de longitud variable. Se encuentra una fuerte inhomogeneidad en dicha distribución para un dado valor de  $f$ . Por ejemplo, para  $f = 1/4$  y a una escala del orden de  $s^{N/2}$ , aparecen muchas cajas con un solo punto, y otras con una gran cantidad de puntos en su interior. A nuestro entender un análisis tan detallado nunca se había realizado con anterioridad en el estudio de problemas similares.

Esta fuerte inhomogeneidad se ve claramente reflejada en el valor de la dimensión fractal de conteo de cajas  $D_B$ . Por ejemplo, el número total de cajas necesario para cubrir los puntos

de llegada para un dado  $f$ , esta dominado por la presencia de muchas cajas con pocos puntos en su interior.

La dimensión de conteo de cajas  $D_B$ , es una de las más utilizadas por los físicos para calcular la dimensión de los objetos fractales. Para objetos autosimilares, se espera que  $D_B$  sea igual a la dimensión fractal [5] de Hausdorff-Besikovitch  $D_H$ . Los físicos utilizan  $D_B$  porque es mucho mas simple de calcular que la verdadera dimensión fractal  $D_H$ .

En nuestro caso particular, la distribución de puntos de llegada para un dado valor de  $f$  no es autosimilar, entonces la igualdad  $D_B = D_H$  podría dejar de cumplirse. Pero aún en este caso la dimensión  $D_B$  nos caracteriza de alguna forma dicha distribución de puntos. En primer lugar,  $D_B$  depende del valor particular que tome  $f$ . En segundo lugar, para un dado valor de  $f$ , como ya se había mencionado,  $D_B$  está dominada por la fuerte inhomogeneidad espacial de la distribución de puntos.

Finalmente podemos decir que este conjunto posee una jerarquía de exponentes multifractales [2], es decir que para cada valor de la frecuencia de pasos  $f$  tenemos un valor de exponente  $D_B(f)$ . En general la función de conteo de cajas no resulta ser invariante de escala, excepto para el caso  $f = 1/2$ .

## Referencias

1. A. C. de la Torre, A. Maltz, H. O. Martín, P. Catuogno and I. García-Mata. *Random walk with an exponentially varying step*. Physical Review E, 62, 6 (2000).
2. T. Tél, A. Fülöp and T. Vicsek. *Determination of fractal dimensions for geometrical multifractals*. Physica A, 159, 155 (1989)
3. P. Meakin. *Fractals, scaling and growth far from equilibrium*. Cambridge University Press, Cambridge (1998).
4. A. Bunde, S. Havlin. *Fractals and disordered systems*. Springer-Verlag, Berlin (1991).
5. M. Yamaguti, M. Hata and J. Kigami. *Mathematics of fractals*. vol. 167. AMS (1997).
6. F. Reif. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. McGraw-Hill, New York (1965).
7. I. Gradshteyn and I. Ryzhik. *Table of integrals, series and products*. Academic Press (1994).
8. M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover (1972).