2

LOS PITAGÓRICOS Y LOS NÚMEROS

Anaxímenes, en otra carta que escribió a Pitágoras, se queja de la situación política que le toca vivir en Mileto:

> Fuiste mucho más inteligente que nosotros al trasladarte de Samos a Crotona, donde resides en paz. Los hijos de Éaco nos causan daño sin cesar y a los milesios no nos faltan dictadores. Terrible se nos presenta el rey de los medos, en cuanto no estamos dispuestos a pagar el tributo. Pero ya están prestos los jonios a marchar a la guerra contra los medos en defensa de la libertad de todos. Y en cuanto marchen ya no habrá esperanza de salvación. ¿Cómo, pues, podría aún pensar Anaxímenes en contemplar los cielos, estando atemorizado por la muerte o la esclavitud? Mientras, tú eres apreciado por los crotoniatas, y estimado también por los demás italianos; incluso vienen a escucharte discípulos desde Sicilia.

Sin embargo, la situación en Crotona no era tan pacífica como Anaxímenes imaginaba.

Pitágoras

Pitágoras (Πυθαγόρας, c. 570 - c. 495 a. C.) creció en la isla de Samos, cerca de Mileto, en la costa de Asia Menor. Emigró a la ciudad de Crotona, una colonia griega en el sur de Italia, donde fundó una escuela que tenía la forma de una comunidad cerrada. Es famoso por el teorema que lleva su nombre y por las investigaciones en armonía musical y acústica, realizadas por él o por sus seguidores. Sin embargo, en la Antigüedad su fama se debía a otros motivos.

Era considerado un conocedor del destino del alma luego de la muerte. Enseñaba que el alma inmortal atravesaba una serie de reencarnaciones y decía tener la capacidad de recordar sus vidas pasadas. Era visto como un experto en rituales religiosos y como el fundador de un estricto estilo de vida que enfatizaba una dieta vegetariana y una auto disciplina rigurosa. El carácter dual de sus enseñanzas se manifestó en la estructura de la comunidad pitagórica: estaban divididos en matemáticos (los que desarrollan la ciencia) y acusmáticos (los que desean escuchar, los que cultivan las prácticas místicas y redentoras de Pitágoras). Pitágoras, sin embargo, representaba una síntesis de estas dos líneas, en apariencia opuestas, al practicar el ejercicio de la matemática como una experiencia mística. Russell (1946) dice al respecto

> Esto puede sonar extraño para aquellos que aprendieron de mala gana un poco de matemática en la escuela; pero para los que han experimentado el deleite embriagador de la comprensión súbita que da la matemática, de cuando en cuando, a quienes la aman, la visión pitagórica parecerá completamente natural aunque no sea cierta.

Agrega que la palabra "teoría" tiene su origen en la religión órfica y que se puede interpretar como "contemplación simpática apasionada". A través de Pitágoras fue adquiriendo su significado más moderno de pensamiento abstracto de tipo contemplativo y racional.

Pitágoras presentó una estructura del cosmos basada en principios morales y en ciertas relaciones numéricas. Los cuerpos celestes se movían de acuerdo con relaciones matemáticas

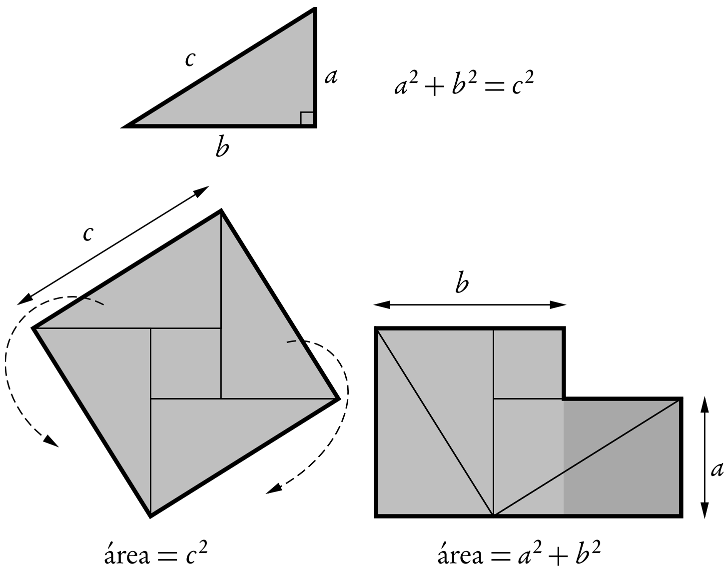


Fig. 2.1. El teorema de Pitágoras se aplica a triángulos rectángulos, como el que se muestra en la parte superior, de lados a, b y c, donde c es el lado mayor. El teorema dice que $c^2 = a^2 + b^2$. Las figuras de abajo representan una posible prueba geométrica. Se usan cuatro triángulos para formar un cuadrado de lado c, cuya área es c^2. Se desplazan dos triángulos como indican las líneas de trazos. Así se obtienen dos cuadrados de lados a y b, cuya área total, $a^2 + b^2$, debe ser igual a la anterior, c^2, que es lo que queríamos demostrar.

Fig. 2.2. *Pitágoras instruyendo a los pescadores*, óleo de S. Rosa, 1662. La escena ilustra una anécdota relatada por Plutarco. Pitágoras salva a los peces rescatándolos, ante sus discípulos, de las redes de los pescadores. Enseñaba que se debe evitar toda crueldad con los animales pues sus cuerpos pueden contener almas humanas.

que también gobernaban los intervalos de concordancia musical, produciendo una música de los cielos, que en tradiciones posteriores se conoció como armonía de las esferas. Aristóteles atribuye a los pitagóricos la idea de que las cosas están hechas de números, y la critica diciendo que

> cuando dicen que los objetos naturales vienen de los números, que lo pesado o ligero procede de lo que no tiene peso ni ligereza, al parecer hablan de otro cielo y de otros cuerpos distintos de los sensibles.

Conocer la vida de Pitágoras y sus seguidores, los pitagóricos, es un problema complicado de resolver. No dejaron nada escrito, los relatos más detallados de la vida y el pensamiento de

Pitágoras datan de ocho siglos luego de su muerte. Ni siquiera se tiene la certeza de que haya demostrado su famoso teorema. El teorema dice que el cuadrado del lado mayor (o hipotenusa) de un triángulo rectángulo es igual a la suma del cuadrado de los otros dos lados. En la figura 2.1 se muestra el esquema de una de las posibles pruebas.

Durante el siglo III los logros de Pitágoras fueron bastante exagerados. Se lo consideraba la fuente de toda filosofía verdadera, cuyas ideas fueron copiadas por Platón, Aristóteles y todos los filósofos griegos que siguieron. Jámblico de Calcis (c. 245 - 325) presentó a Pitágoras como un enviado de los dioses para iluminar a la humanidad. Porfirio (c. 232 - 304) enfatizó los aspectos divinos de Pitágoras hasta ponerlo como un posible rival de Jesús. Diógenes Laercio cuenta que era tan admirado que sus sentencias eran llamadas "palabras de Dios".

No solo los neopitagóricos del siglo III atribuían cualidades divinas a Pitágoras. Mucho antes, Aristóteles decía que Pitágoras tenía un muslo de oro, considerado entonces como un signo de divinidad. También que aparecía al mismo tiempo en Metaponto y en Crotona, y que mató a una serpiente venenosa de una manera curiosa: mordiéndola. La gente de Crotona lo llamaba Apolo Hiperbóreo (una de las manifestaciones de Apolo). Existen similitudes entre las habilidades sobrenaturales de Pitágoras y las de Empédocles, de quien se hablará más adelante, que prometía a sus alumnos enseñarles el control de los vientos y cómo resucitar a los muertos. Según Jámblico, los pitagóricos enseñaban que, de los seres racionales, un tipo es divino, otro es humano, y otro es como Pitágoras.

Pero no todos tenían tan buen concepto. Según Heráclito (c. 535 - c. 484 a. C.), Pitágoras era el jefe de los charlatanes. Quizá tenía presente la historia que cuenta Diógenes Laercio, en la que Pitágoras se hizo una habitación subterránea, se refugió en ella y luego

Fig. 2.3. Pitágoras emergiendo del mundo de los muertos. Óleo de S. Rosa, siglo XVII, fragmento.

> ...pasado tiempo, salió Pitágoras flaco y macilento, y congregando gentes, dijo que volvía del infierno; y les iba contando las cosas acontecidas. Los oyentes, conmovidos por lo que había dicho, prorrumpieron en lágrimas y lamentos, y creyeron en Pitágoras algo de divino, de manera que le entregaron sus mujeres para que aprendiesen sus preceptos; de donde vino que fueron llamadas *pitagóricas*.

Algunas costumbres y preceptos de los pitagóricos no fueron tomados en serio por escritores de comedia griega del siglo IV a. C., como Antífanes, Alexis de Turio y Aristofón. Las reglas prohibían a los pitagóricos usar los baños públicos o comer seres animados. Un fragmento de una obra de Aristofón sugiere que esta vida ascética se basaba más en la pobreza que en el escrúpulo filosófico y que, si uno ponía carne y pescado frente a uno de estos "pitagoristas", los engullían sin reparos. En un fragmento de Alexis, luego de que el orador informa que los pitagóricos no comen seres animados, alguien interrumpe diciendo "Epicharides come perros, y es un pitagórico", a lo que el orador responde "sí, pero los mata primero y así ya no están animados". Se supone que también Jenófanes se burlaba cuando contaba que

> Una vez, dicen, [Pitágoras] pasaba cuando un cachorro estaba siendo golpeado, se compadeció y dijo: "¡Alto! Detén la paliza, porque ésta es en realidad el alma de un hombre que fue mi amigo; lo reconocí cuando lo escuché aullar".

Algunas actitudes eran interpretadas como símbolos que revelaban afinidad con el pensamiento de Pitágoras. Diógenes Laercio da una lista y explica su significado. No herir fuego con espada equivale a no incitar la ira de los poderosos. No pasar por encima de una balanza es no traspasar la igualdad y la justicia. No comer corazón expresa que no se ha de atormentar el ánimo con angustias, etc. Luego agrega: "Por estos términos se explica lo restante", y nos deja sin indicios para entender qué puede significar no fregar la silla con aceite, o no mear de cara al sol.

Otro precepto importante, relacionado con la muerte de Pitágoras, era no comer habas, ni siquiera tocarlas. Un motivo aludido por Aristóteles era que semejan las partes pudendas; otro, que se usaban para votar, de donde se deduce que la recomendación significa no involucrarse en asuntos políticos. Pero no fue ésta la actitud de Pitágoras. Su preocupación por la política se manifiesta en una carta que escribió a Anaxímenes, respondiendo a la que se citó al principio de este capítulo:

> También tú, de no haber sido mejor que Pitágoras por tu linaje y renombre, habrías emigrado de Mileto hacia otro lugar. Pero te retiene el honor familiar y el de tu patria. (...) Si vosotros, las gentes de honor, abandonáis vuestras ciudades, su buen gobierno

Es mejor ser atrapado que pisar estas habas.

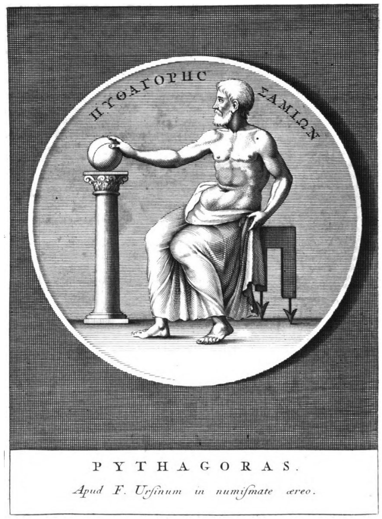


Fig. 2.4. Retrato de Pitágoras del siglo XVII, basado en la imagen de una moneda romana de la época del emperador Decio, siglo III. Y su frase póstuma.

> se verá abatido y resultará para ellas más peligrosa la vecindad con los medos. Que no es bueno dedicarse continuamente a escrutar los cielos, sino que es mejor velar también con ahínco por la patria. Tampoco yo estoy enteramente dedicado a mis especulaciones, sino que me hallo implicado también en las guerras en las que se enfrentan entre sí los itálicos.

Pitágoras y sus seguidores participaron a favor de los agrigentinos en un conflicto con los siracusanos. Su facción terminó siendo derrotada. Luego de una batalla o, según otra versión, luego de que incendiaran la casa donde se encontraba, al huir se topó con un campo de habas. Se detuvo y dijo: "mejor es ser atrapado que pisar estas habas". Se volvió hacia sus perseguidores y descubrió la garganta al filo de las espadas enemigas. Se dice que así murió Pitágoras, junto a muchos de sus discípulos, por culpa de unas habas.

Teorema ¿de Pitágoras?

Una persona debía resolver el siguiente problema: si se tiene un cuadrado de lado 30, ¿cuánto mide su diagonal? Tomó un poco de arcilla fresca, la alisó y luego trazó con habilidad, usando su estilete, las rectas que formaban el cuadrado. Escribió a un costado el número 30 para indicar la longitud del lado. Trazó las diagonales. Sabía que para un cuadrado de lado 1 la diagonal tiene una longitud igual a $\sqrt{2}$. Escribió ese valor sobre la diagonal. Para un cuadrado de lado 30, la diagonal debía ser 30 veces la raíz de 2. Hizo la cuenta y escribió el resultado. Observó la tablilla y quedó satisfecho, había resuelto correctamente el problema. Dejó la tablilla al sol para que se secara y se endureciera. Todo esto sucedió entre los siglos XVIII y XVII a. C., en Babilonia, unos 1200 años antes de Pitágoras. La tablilla puede verse en la figura 2.5. Arriba, a la izquierda, está el número 30: , la longitud del lado. Sobre la diagonal se ve el número

1; 24, 51, 10

En la transcripción a números arábigos se usa el punto y coma para separar la parte entera de la fraccionaria, y las comas para separar las posiciones de la notación sexagesimal. Podemos transformar este número a notación decimal de la siguiente forma: $1 + 24\frac{1}{60} + 51\frac{1}{60^2} + 10\frac{1}{60^3} = 1{,}41421\ldots$ Se trata de una excelente aproximación a $\sqrt{2}$. Abajo se ve el resultado de multiplicar 30 por $\sqrt{2}$:  o 42;25,35. La tablilla demuestra que los babilonios conocían el resultado del teorema de Pitágoras mucho antes que Pitágoras.

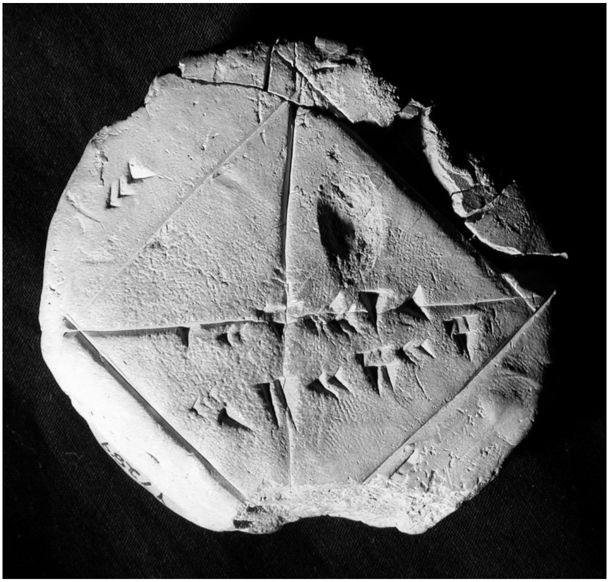


Fig. 2.5. Tablilla YBC 7289, de entre los siglos XVIII y XVII a. C., Babilonia. Contiene el cálculo de la diagonal de un cuadrado de lado 30.

En China se lo conoce como el teorema *gougo* (ancho-largo). La tradición lo atribuye a Shang Gao, el astrólogo del duque de Zhou, del siglo XI a. C. La versión de Shang Gao aparece en el libro *Zhou Bi Suan Jing* (*Clásicos de matemática del gnomon Zhou*, ver referencias en notas al final, p. 261). El libro de Shang Gao es una sección del *Zhou Bi* que, según algunos investigadores, pudo haber sido escrito mucho después de la dinastía Zhou, alrededor del siglo I d. C.

A la lista formada por Pitágoras y Shang Gao habría que agregar dos nombres de India: Baudhayana (c. 800 a. C.) y Apastamba (c. 600 a. C.) ambos estudiosos del Iáyur-veda. Escribieron textos del tipo *Shulba-sutra*, dedicados al diseño y construcción de altares en los que se incluían principios de la geometría. Presentan listas de ternas pitagóricas, como 3,4,5 o 5,12,13, números que corresponden a los lados de un triángulo rectángulo y que satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$. Listas similares también se encontraron en Mesopotamia y Egipto.

A pesar de estas evidencias, quizá no sea inapropiado que el teorema reciba el nombre de Pitágoras. La prueba general más antigua que se conoce sigue siendo griega. Es la que aparece en *Los elementos* de Euclides, de c. 300 a. C. (distinta, aunque equivalente a la de la figura 2.1). Sin embargo, Euclides no atribuye la prueba a nadie en particular. El autor más antiguo que la asocia al nombre de Pitágoras es Vitruvio (fl. c. 30 - 20 a. C.). En su *De Architectura* dice

> Pitágoras demostró el método para formar un triángulo rectángulo sin la ayuda de los instrumentos de los artesanos; lo que ellos apenas, aún con gran dificultad, obtenían de forma exacta, puede realizarse con sus reglas con gran facilidad. Se consiguen tres varillas, una de tres pies, una de cuatro pies y la otra de cinco pies de largo, y se juntan de modo que se toquen en sus extremos; formarán entonces un triángulo, uno de cuyos ángulos será recto. (...) Cuando Pitágoras descubrió esta propiedad, convencido de que las Musas lo habían ayudado en el descubrimiento, demostró su gratitud a ellas con un sacrificio.

No se sabe con certeza, pero es posible que Vitruvio se haya basado en una fuente más antigua, hoy perdida, para asignar a Pitágoras la autoría del teorema. Es interesante notar el valor que Vitruvio otorga a la utilidad práctica de una verdad matemática abstracta. Menciona la posibilidad de usarla en la construcción de escaleras de edificios para que cada escalón tenga la altura correcta. Otros autores también mencionan un sacrificio para agradecer a los dioses, pero uno mayor: una hecatombe, el sacrificio de cien bueyes. En la Edad Media, el teorema de Pitágoras era llamado “Inventum hecatombe dignum”. Estos relatos entran en contradicción con la creencia pitagórica en la transmigración de las almas, que imponía el respeto por la vida de los animales.

Hipaso

Hipaso de Metaponto (Ἵππασος), discípulo de Pitágoras, vivió entre los siglos VI y V a. C. Junto a Pitágoras, Hipaso fue un pionero en el estudio matemático de la música y la armonía. Desarrolló la teoría de proporciones numéricas simples asociadas a los intervalos musicales que producen consonancia, y apoyó esta teoría con experimentos acústicos. Pitágoras sacó a los números de la esfera práctica del comercio para enfatizar las correspondencias entre el comportamiento de los números y el de las cosas. Tradiciones posteriores le adjudicaron la idea de que todo está fundado en números. Los intervalos armónicos dados por proporciones simples, y estudiados experimentalmente por Hipaso, apoyaban esta idea. Filolao (Φιλόλαος, c. 470 - c. 385 a. C.), otro discípulo de la escuela de Pitágoras, decía que

> Uno debe estudiar las actividades y la esencia del Número. (...)
> Sin esto, todas las cosas son ilimitadas, oscuras e indiscernibles. Pues la naturaleza del Número es la causa del reconocimiento, capaz de dar orientación y enseñanza a todo hombre en lo desconcertante y lo desconocido. Pues nada de lo que existe estaría claro para alguien, tanto en sí mismo como en su relación con otras cosas, a no ser por la existencia del Número y su esencia. Pero de hecho el Número, encajando todas las cosas en el alma a través de la percepción sensorial, las hace reconocibles y comparables entre ellas, (...) el Número les da cuerpo. (...)
> La naturaleza del Número y la Armonía no admite falsedad; pues no está relacionada con ellos. La falsedad y la envidia pertenecen a la naturaleza de lo

> ilimitado y lo no inteligente y lo irracional. La falsedad de ningún modo puede respirar del Número; pues la falsedad es contraria y hostil a su naturaleza, mientras que la verdad está relacionada y en estrecha unión natural con el carácter del Número.

Cuando habla de Número, Filolao se refiere a los naturales, en especial a los más bajos (1, 2, 3, 4), o a fracciones. Arquitas, otro pitagórico, conectó de manera similar razonamiento matemático con valores morales como igualdad y justicia (ver p. 116). Hipaso decía que el Número es el instrumento que el dios que creó el mundo usa para medir.

La de Hipaso es una historia de secretos, condena y muerte dentro del grupo de los pitagóricos. Pitágoras no aparece en ella, y es posible que ya hubiera muerto en el momento en que sucedieron los hechos. Los detalles están desdibujados por el paso del tiempo. La principal fuente de información es Jámblico. Cuenta que Hipaso fue el fundador del grupo de los matemáticos, en oposición a los acusmáticos. También dice que fue el fundador de los acusmáticos, en oposición a los matemáticos. Con este tipo de información se ha reconstruido la historia que sucedió aproximadamente como sigue.

En algún momento, durante la primera mitad del siglo V a. C., Hipaso hizo un descubrimiento que dejó atónitos a sus compañeros pitagóricos. Se trataba de los números inconmensurables o irracionales, o sea, números que no pueden expresarse como el cociente de dos números naturales.

La demostración de este descubrimiento es una pequeña joya de la matemática. Lo que sigue es una de las posibles demostraciones. Según el teorema de Pitágoras, un triángulo rectángulo de lados $a = b = 1$ tiene una hipotenusa $c = \sqrt{2}$; esta distancia es, por supuesto, la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1. El problema era que nadie había podido encontrar un número fraccionario, o racional, que, al multiplicarlo por sí mismo, diera

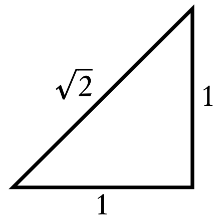


Fig. 2.6. Triángulo rectángulo con dos lados igual a 1.

2. Podía estar cerca, pero nunca daba exactamente 2. En un texto de Aristóteles, el problema se analiza de la siguiente manera.

Supongamos que podemos escribir $\sqrt{2} = m/n$, donde m y n son dos números naturales, en principio desconocidos, que no pueden ser ambos pares a la vez; si lo fueran, los podríamos dividir por 2 tantas veces como fuera necesario, y tendríamos la misma fracción.

Si elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación, obtenemos $2 = m^2/n^2$.

Entonces, $m^2 = 2n^2$, o sea, m^2 es par, lo que significa que m es par (ver nota al final, p. 262).

Si m es par, entonces se puede escribir $m = 2x$, donde x es algún número natural, y elevando al cuadrado se tiene $m^2 = 4x^2$. Como teníamos $m^2 = 2n^2$, entonces $4x^2 = 2n^2$.

Por lo tanto $n^2 = 2x^2$ es par, lo que significa que n también es par.

Llegamos a una contradicción, pues por la definición inicial, m y n no eran ambos pares. Pero ahora resulta que sí lo son. La contradicción indica que se ha partido de una hipótesis falsa (*reductio ad absurdum*). De este modo queda demostrado que $\sqrt{2}$ no puede expresarse como el cociente de dos números naturales. Pertenece, por lo tanto, a otro tipo de números: los irracionales.

No todo tiene un logos, hay números irracionales.

Fig. 2.7. Hipaso de Metaponto, retrato imaginario de 1817.

Cuando Hipaso terminó la demostración, sus compañeros estaban impresionados. Algunos autores terminan la historia en este punto con cierta brusquedad, pues afirman que la reacción de los pitagóricos fue arrojar a Hipaso por la borda del barco en el que navegaban en ese momento.

Una versión bastante difundida dice que los pitagóricos vieron en la demostración de Hipaso una especie de blasfemia. Hipaso les estaba mostrando que la simple diagonal de un cuadrado no encajaba en el esquema de que todo está fundado en números naturales, o en fracciones. Creían que cualquier magnitud tenía una proporción, una razón o *logos*, pero según Hipaso la raíz de 2 no la tenía.

Otra posibilidad es que los pitagóricos quedaran tan asombrados con el descubrimiento de este nuevo tipo de nú-

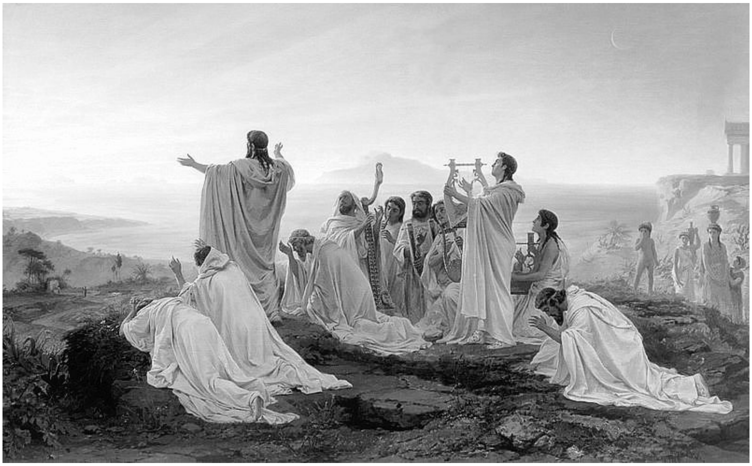


Fig. 2.8. *Los pitagóricos celebran el amanecer*, óleo de F. Bronnikov, 1869. Varios personajes tocan instrumentos musicales, lo que recuerda sus estudios de armonía y consonancia. Este grupo de apariencia pacífica fue el que, según algunas tradiciones, terminó con la vida de Hipaso.

meros que lo consideraron un tesoro valioso, uno que no debía compartirse. Decían que "no deben manifestarse todas las cosas a todos". Blasfemia o tesoro, en todo caso el descubrimiento debía ocultarse. Quizá, en algún momento, Hipaso pensó que, si mantenía el secreto, jamás recibiría la gloria del reconocimiento. Explicó la demostración a personas ajenas a la comunidad y recibió el castigo por su infidencia: murió ahogado. Jámblico deja claro que el castigo provino de los dioses y que se debió a comportamiento impío. Reconstrucciones más modernas de esta historia intentan poner a los dioses a un lado y culpan a los compañeros de Hipaso de arrojarlo al mar, como se mencionó antes. En cualquier caso, su final fue trágico.

La historia le otorgó, al fin, el reconocimiento que quizá buscaba. Hoy se lo suele presentar como un mártir de los números irracionales.

Algunos indicios sugieren que la relación entre Hipaso y Pitágoras no fue buena. Diógenes Laercio menciona un texto titulado *Discurso místico*, hoy perdido, que se supone escrito por Hipaso para desacreditar a Pitágoras. Entre los relatos de Jámblico sobre Hipaso, hay un párrafo que arroja una sombra de duda sobre su honestidad:

> Con respecto a Hipaso, (...) encontró el destino de los impíos en el mar como consecuencia de haber divulgado y explicado el método de trazar la esfera de doce pentágonos [el dodecaedro], pero pudo lograr renombre como descubridor. En realidad, sin embargo, esto como todo lo relacionado con geometría pertenecía "a aquel hombre". En efecto, denominaban así a Pitágoras, y no lo llamaban por su nombre.

El dodecaedro es un sólido regular de doce caras, todas con forma de pentágono. Según Jámblico, el descubridor fue "aquel hombre", al que todo lo que sabían de geometría pertenecía, y lo identifica con Pitágoras.

Se cree que Hipaso no fue el autor de la construcción matemática del dodecaedro, pero tampoco Pitágoras; se lo considera un logro posterior de Teeteto (c. 417 - 369 a. C.). Un texto de Platón sugiere que el universo tiene la forma del dodecaedro, y asocia los otros cuatro sólidos regulares a los cuatro elementos. Como el dodecaedro tiene pentágonos en sus caras, también el pentágono sería símbolo del universo. El pentagrama, la estrella de cinco puntas inscrita dentro de un pentágono, era el símbolo que los pitagóricos usaban para identificarse entre sí. Al hablar del dodecaedro, se supone que Jámblico se refiere a las caras en forma de pentágono y a la prueba geométrica de que la relación entre partes de un pentágono es un número irracional, pues en otra parte repite la historia refiriéndose al descubrimiento de los irracionales, el tema de Hipaso. El filólogo clásico Von Fritz (1944) tiene una opinión de Hipaso más favorable que la que se desprende de la cita de Jámblico. Dice que "no hay razón alguna para no creer que Hipaso fue capaz de demostrar la inconmensurabilidad entre el lado y el diámetro de un pentágono regular".

En los párrafos que siguen se describe con cierto detalle esta demostración que nos acerca más al razonamiento geométrico de los primeros pitagóricos. Antes, unas palabras de advertencia. La comprensión de estos razonamientos no solo requiere cierto esfuerzo intelectual, sino que también se debe enfrentar el vértigo de asomarse al abismo sin fin que se oculta en el centro de un símbolo satánico. Los que prefieran evitarlo, pueden saltear el resto de esta sección.

El pentagrama, símbolo de perfección matemática y del universo para los pitagóricos, era un símbolo mágico para algunos ocultistas. Es el que utiliza Fausto para invocar a Mefistófeles en la obra de Goethe. El pentagrama se suele dibujar dentro de un círculo. En nuestro caso toca los vértices de un pentágono, como se ve en la figura de la página 50.

Antes de analizar el pentagrama, es necesario mencionar el concepto de medida máxima común, o máximo común divisor, que abreviaré con las iniciales "mcd". El mcd de dos enteros es el mayor número que los divide en forma exacta, es decir, con resto cero. Por ejemplo, el mcd de 12 y 16 es 4. Se escribe lo mismo de forma más abreviada como $\mathrm{mcd}(12,16) = 4$. Hay una forma eficiente de encontrar el mcd que era conocida en la época de Pitágoras, o aún antes. Se trata del algoritmo de Euclides, o método de sustracción mutua. Se basa en que el mcd de dos cantidades a y b, con $a < b$, es igual al mcd de a y $b-a$. O sea, $\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}(a,b-a)$. Lo podemos aplicar, en forma repetida, al ejemplo anterior:

$$\mathrm{mcd}(12,16) = \mathrm{mcd}(12,4) = \mathrm{mcd}(8,4) = \mathrm{mcd}(4,4) = 4,$$

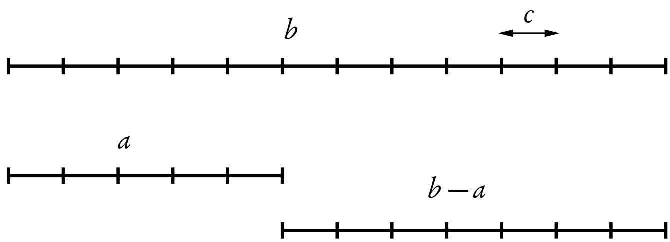


Fig. 2.9. El segmento de tamaño c es una medida común de las longitudes a y b, pues ambas son iguales a un número entero de veces c. También se ve que la diferencia, $b-a$, tiene la misma medida común.

donde en el último paso se usó que el mcd de dos cantidades iguales es la misma cantidad. En general, si tenemos $\text{mcd}(a,b)=c$, la cantidad c es una medida común de a y b, pues ambas pueden expresarse como un número entero de veces c, o sea, $a = mc$ y $b = nc$, donde m y n son números enteros. Y esto, para los pitagóricos, es lo que da cuerpo a las magnitudes a y b, lo que las hacer reconocibles y comparables; si no fuera posible, las cosas serían "ilimitadas, oscuras e indiscernibles", como decía Filolao. Hallar la medida común c implica de forma inmediata que $a/b = m/n$ es un número racional, lo que llamaban *logos* o razón. Se suponía que la esencia de todo podía expresarse de esa manera. Ya vimos que no es posible para la relación entre el lado y la diagonal de un cuadrado. Ahora lo veremos, de forma geométrica, para las partes de un pentágono.

La figura 2.10 muestra un pentágono regular de lado a. Las diagonales, de longitud b, forman el pentagrama. Se puede demostrar que $b-a=b'$ y $a-b'=a'$, donde a' y b' son lado y diagonal del pentágono pequeño dentro de la estrella. La demostración no es complicada, pero no se incluye para evitar que esta sección se prolongue demasiado. Tomando medidas en la figura

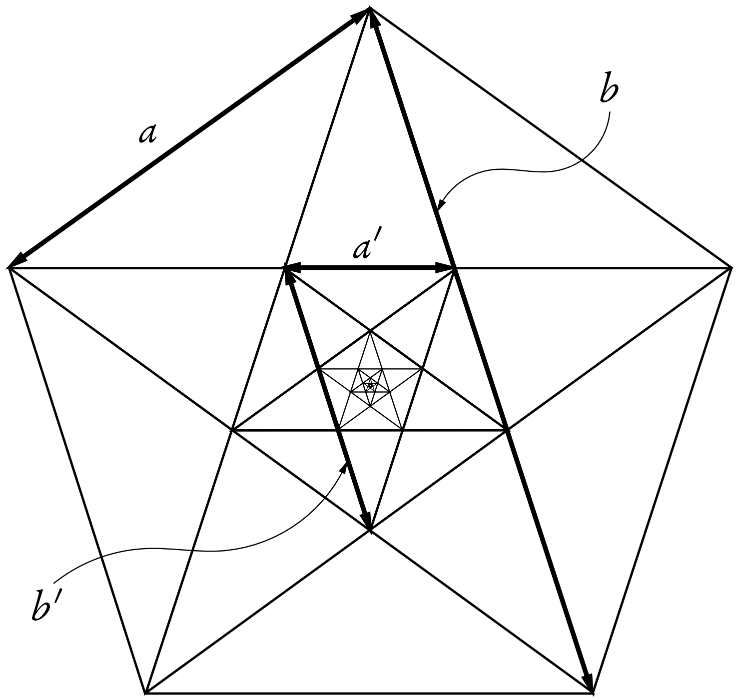


Fig. 2.10. Pentágono regular de lado a. Al trazar las diagonales, de longitud b, se obtiene la estrella de cinco puntas, el pentagrama. Dentro de la estrella aparece otro pentágono, de lado a', donde también se pueden trazar las diagonales, ahora de longitud b'. Así se puede seguir hasta el infinito.

se puede comprobar que esas relaciones se satisfacen. Tratándose de un símbolo usado por los pitagóricos, es normal suponer que lo analizaran con detenimiento e intentaran encontrar la medida común entre las longitudes a y b. Usando el método de sustracción mutua y las relaciones antes mencionadas, podemos escribir

$$\begin{aligned}\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}(a,b-a) = \mathrm{mcd}(a,b') = \mathrm{mcd}(a-b',b')\\ = \mathrm{mcd}(a',b').\end{aligned}$$

Llegamos a que el mcd de a y b es igual al mcd de a' y b', o sea, de las cantidades correspondientes al pentágono dentro de la estrella. Los mismos razonamientos podrían repetirse para obtener $\mathrm{mcd}(a',b') = \mathrm{mcd}(a'',b'')$, siendo a'' y b'' las partes correspondientes al siguiente pentágono más pequeño. Así podríamos seguir indefinidamente, y el método nunca nos daría la medida común de a y b. Por lo tanto, esa medida no existe. Esto significa que no es posible escribir a/b como el cociente entre números naturales. La relación entre a y b es irracional o, como decían los griegos, *alogos*.

3

TODO FLUYE – NADA FLUYE

Heráclito

Heráclito de Éfeso (Ἡράκλειτος, c. 535 - c. 475 a. C.), "el Oscuro", el filósofo que llora, es un caso especial en la historia de la ciencia y la filosofía por sus ideas abstractas, por la imagen negativa de su personalidad y por su terrible final. Aparece como un continuador de la escuela de Mileto, iniciada por Tales, al proponer una descripción del cosmos basada en un elemento: el fuego. Pero las ideas de Heráclito tienen características que lo diferencian de los seguidores de Tales. Su propuesta del fuego como principio natural debe entenderse más en sentido metafórico que literal. El fuego es la fuente de todas las cosas. Existe un continuo intercambio de materia de modo que, en parte, el fuego se transforma en agua y tierra, y viceversa:

> Hay intercambio: todas las cosas por fuego y fuego por todas las cosas, como bienes por oro y oro por bienes.

Las cantidades relativas de las tres formas principales, fuego, agua y tierra, se mantienen fijas. Este balance permanente es un indicio del principio de conservación de la materia, propuesto por Lavoisier mucho después, en el siglo XVIII.

Aquellos que se paran en el mismo río tienen diferentes aguas siempre fluyendo sobre ellos.

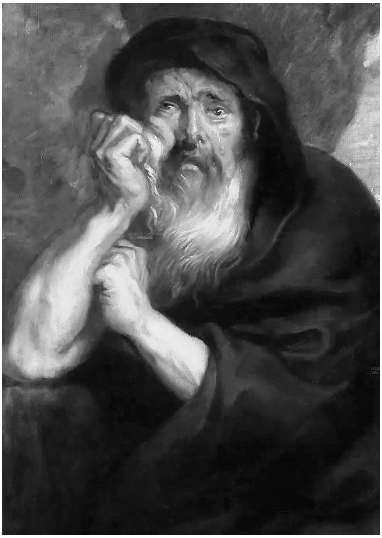


Fig. 3.1. Heráclito, retrato imaginario de P. Rubens, 1603, en el que se reproduce la imagen tradicional del filósofo lloroso y con ropas oscuras.

El fuego es materia, y también un símbolo de inestabilidad, de cambio incesante. Se atribuye a Heráclito la idea de que lo único que perdura en el universo es el cambio. Dijo:

> Aquellos que se paran en el mismo río tienen diferentes aguas siempre fluyendo sobre ellos.

Un siglo después, Platón simplificó este fragmento en la versión más difundida: “no se puede entrar dos veces en el mismo río”, pues el río no es el mismo y nosotros no somos los mismos, enfatizando el cambio permanente. La consecuencia es que el conocimiento se hace imposible, pues cuando uno cree saber algo enseguida queda desactualizado por el constante cambio. Así pensaba Cratilo, filósofo de la escuela de Heráclito, citado por Airstóteles:

> Cratilo (...) llegaba hasta creer que no es preciso decir nada. Se contentaba con mover un dedo y consideraba como reo de un crimen a Heráclito, por haber dicho que no se pasa dos veces un mismo río; en su opinión no se pasa ni una sola vez.

Pero la versión original de Heráclito, si se la entiende en el contexto de su obra, dice más. Habla del flujo de la materia y también de la presencia de regularidad y constancia en el mundo al hablar de "el mismo río". Decía que todo surge de la unidad y el conflicto de opuestos, en este caso, la permanencia y el cambio. También dijo, para agregar más confusión:

> En el mismo río, nos paramos y no nos paramos, somos y no somos.

La dificultad en la interpretación de las palabras de Heráclito dio origen a su epíteto "el Oscuro".

Sus opiniones sobre filósofos, poetas o conciudadanos no ayudaron a que se ganara amistades. Como se mencionó antes, consideraba que Pitágoras era el jefe de los charlatanes y que su doctrina era un arte fraudulento. Decía de Homero que debía ser abofeteado y echado de los certámenes de poesía. Debido a un problema que hubo entre los representantes de la ciudad y un amigo suyo, decía que "todos los efesios adultos deberían colgarse, y dejar la ciudad a los imberbes". Cuando le pidieron que participara en el dictado de leyes, se fue a jugar con tabas, o astrágalos, con unos niños diciendo a los ciudadanos que eso era mejor que gobernar con ellos.

Logró fama de arrogante y misántropo, quizá exagerada por biógrafos de siglos posteriores que no lo favorecieron. Diógenes Laercio cuenta que "finalmente, fastidiado de los hombres, se retiró a los montes y vivió manteniéndose de hierbas".

La fama de llorón tiene su origen en una broma de Platón. La interpretación de Platón de la filosofía de Heráclito se resumía a "todo fluye". Comparaba a los seguidores de Herácli-

Fig. 3.2. Heráclito jugando con tabas con unos niños, junto al templo de Artemisa. A la derecha están los ciudadanos de Éfeso, consternados, pues le habían pedido su participación en el dictado de leyes. Les dijo: "¿De qué os sorprendéis, gente ruin? ¿Acaso no es mejor hacer esto que gobernar la ciudad en vuestra compañía?". Ilustración de 1598.

to con personas con catarro, en las que la mucosa y las lágrimas fluyen. La imagen de Heráclito como el filósofo que fluye, que llora, se transformó en un exitoso arquetipo, opuesto al del filósofo risueño Demócrito.

El final de Heráclito es quizá también el producto de una tradición posterior a su época. La mala dieta de hierbas, apartado en los montes, produjo en Heráclito una hidropesía (retención de agua en los tejidos), la peor de las enfermedades para alguien que pensaba que un alma seca es la mejor y más sabia. El tratamiento elegido por Heráclito fue cubrir su cuerpo con estiércol y echarse al sol para que el calor generado de esta manera lo librase de su exceso de agua. La receta no era inusual por entonces para distintas dolencias. Pero no dio resultado. Heráclito murió al día siguiente y, según una versión, fue luego devorado por perros. Tenía 60 años.

Se le atribuye la siguiente frase, en la que expresa tanto búsqueda de reconocimiento de los hombres como desprecio por la mayoría:

> Los mejores elijen una sola cosa en lugar de todo lo que existe: fama eterna entre los mortales. La mayoría, sin embargo, están satisfechos como bestias.

Gracias a sus ideas y, quizá también, a las historias que se crearon acerca de su vida, su mayor ambición se ha cumplido. Luego de 2500 años sus frases siguen siendo recordadas; su nombre no ha sido olvidado.

Las ideas de Parménides (Παρμενίδης, fl. 490 - 450 a. C.) se opusieron, en algunos aspectos, a las de Heráclito. Se supone que se dirigía a los seguidores de Heráclito cuando escribió:

> muchedumbre de insensatos, para quienes el ser y el no-ser les parecen lo mismo y no lo mismo, y el camino de todas las cosas se halla en direcciones opuestas.

La posición de Parménides era que lo que sea que constituye la naturaleza de la realidad, siempre ha sido, dado que nada puede crearse de la nada. Y lo que es, tampoco puede dejar de ser. Este argumento lo condujo a una concepción estática de la realidad: nada fluye. El desafío que dejó Parménides a los pensadores que lo sucedieron, como Anaxágoras y Empédocles, fue explicar los cambios aparentes que se observan en la naturaleza manteniendo su esencia inmutable.

Zenón

Bertrand Russell introduce a Zenón de Elea (Ζήνων, c. 490 - 430 a. C.) en su clásico *Principios de la matemática* con las siguientes palabras:

> En este mundo caprichoso, nada es más caprichoso que la fama póstuma. Una de las víctimas más notables de la falta de juicio de la posteridad es Zenón de Elea. Habiendo inventado cuatro argumentos, todos inconmensurablemente sutiles y profundos, el grueso de las filósofos posteriores lo declararon como un mero ilusionista ingenioso, y todos y cada uno de sus argumentos como sofismas.

Russell otorga a las paradojas de Zenón una relevancia que sus predecesores le negaron, pero, como sus predecesores, también las refuta. La necesidad de refutarlo está en que Zenón niega, nada menos, la posibilidad del movimiento. Si aceptamos que nuestras percepciones, al menos muchas de ellas, están sostenidas y originadas en un mundo real, que lo que observamos no es mera ilusión, entonces el movimiento existe y los argumentos de Zenón tienen que tener una falla. Si, en cambio, creemos que lo único real son nuestras ideas y que nuestras percepciones son ilusorias, entonces no hay contradicción entre las afirmaciones de Zenón y la observación del movimiento. Zenón está en el origen de la distinción entre las posturas filosóficas realista e idealista, en el sentido básico y sin matices de las frases anteriores.

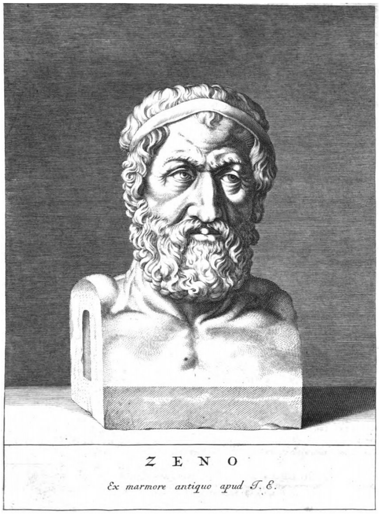
Uno de los primeros en considerar los argumentos de Zenón como sofismas, o argucias falaces, fue Aristóteles. Para él, Zenón era un polemista, discutidor y traficante de paradojas que, sin embargo, proponía argumentos lo suficientemente sofisticados como para prestarles atención. Lo consideraba el inventor de la dialéctica, el arte de la conversación y la argumentación lógica. Zenón era un maestro en el uso de la contradicción. Platón se refería a Zenón como Palámedes de Elea, y en uno de sus diálogos se afirma:

> ¿No sabemos que el Palámedes de Elea hablaba con tanto arte, que presentaba a sus oyentes las mismas cosas semejantes y desemejantes, simples y múltiples, en reposo y en movimiento?

Fue discípulo de Parménides, de quien aprendió que el mundo, además de estar estático, es *Uno*, continuo y homogéneo, o sea, lo que es no tiene grados de existencia. Escribió un texto defendiendo las ideas de su maestro. Por lo que cuenta Platón, la motivación de Zenón fue devolver los ataques recibidos; Zenón dice:

> Es perfectamente verdadero que este escrito ha sido compuesto para apoyar a Parménides contra los que intentaban ponerle en ridículo, diciendo, que si todo es uno, resultan de aquí mil consecuencias absurdas y contradictorias. Mi libro es una réplica a la acusación de los partidarios de la pluralidad. Les devuelvo sus argumentos, y en mayor número; como que el objeto de mi libro es demostrar que la hipótesis de la pluralidad es mucho más ridícula que la de la unidad, para quien ve con claridad las cosas.

El texto de Platón indica que Zenón escribió su libro durante su juventud, con espíritu beligerante y amor a la gloria. El Zenón más maduro aparece algo avergonzado de sus excesos de juventud. El objetivo fue quizá apoyar a Parménides, pero las consecuencias llegaron más lejos, hasta plantear cuestiones difíciles y profundas relacionadas con los fundamentos del espacio, el tiempo y el movimiento. El texto de Zenón se ha perdido, pero se conocen algunos de sus argumentos a través de referencias de otros autores. Las paradojas de Zenón buscan demostrar, a través del absurdo, que la creencia en el cambio y la pluralidad es errónea, y que el movimiento es una ilusión. Solo se analizará una, la más conocida, con algún detalle. Me refiero a la paradoja de Aquiles y la tortuga, que Aristóteles presenta de la siguiente manera:



El objeto de mi libro es demostrar que la hipótesis de la pluralidad es mucho más ridícula que la de la unidad.

Fig. 3.3. Retrato imaginario de Zenón, de fines del siglo XVII.

> el corredor más lento nunca podrá ser alcanzado por el más veloz, pues el perseguidor tendría que llegar primero al punto desde donde partió el perseguido, de tal manera que el corredor más lento mantendrá siempre la delantera.

La hipótesis es que Aquiles corre más rápido que la tortuga. De acuerdo con la idea usual de movimiento, Aquiles alcanza a la tortuga y la pasa. Pero, de acuerdo con el argumento de Zenón, eso no puede suceder. Zenón usa esta reducción al absurdo para afirmar que el movimiento es una ilusión.

Supongamos que Aquiles corre diez veces más rápido que la tortuga, y que le da 9 metros de ventaja iniciales. Cuando Aquiles recorre esa distancia, la tortuga se movió 0,9 m. Aquiles recorre 0,9 m; la tortuga se adelanta 0,09 m. Así hasta el infinito. Cada vez que Aquiles recorre la ventaja que tiene la tortuga, ésta

Fig. 3.4. Esquema de la carrera de Aquiles y la tortuga. Se muestran los tres primeros pasos de la secuencia. En la posición inicial, la tortuga tiene una ventaja de 9 m. Cada vez que Aquiles recorre la ventaja, la tortuga se adelanta un poco.

se adelanta un poco. Nunca la alcanza. Las distancias que recorre Aquiles en cada paso son 9 m, 9,9 m, 9,99 m, ..., pero nunca llega a 10 m, que sería el punto en el que, al fin, Aquiles y la tortuga tienen la misma posición.

Hay distintas interpretaciones del significado de la paradoja, cada una con distintas refutaciones asociadas.

Dicen que cuando Diógenes de Sinope escuchó el argumento de Zenón, su respuesta fue ponerse de pie en silencio y caminar. No hubiera impresionado mucho a Zenón, para quien a veces las cosas no eran lo que parecían. Aunque uno tome una postura realista como la de Diógenes, todavía es necesario entender dónde está la falla de la paradoja para poder tener una descripción coherente del movimiento.

Según una interpretación, Aquiles no alcanza a la tortuga porque debe realizar un número infinito de pasos, y eso requiere un tiempo infinito. La refutación es que la suma de los intervalos de tiempo que corresponden a cada paso, a pesar de tener infinitos términos, da un resultado finito. Supongamos que Aquiles corre a 10 m/s. El primer tramo, de 9 m, le lleva 0,9 segundos, el siguiente, de 0,9 m, 0,09 segundos, etc. El tiempo que le lleva toda la secuencia es

$$0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \ldots = 0{,}999\ldots = 1 \text{ segundo.}$$

El último paso no es una aproximación; es matemáticamente correcto igualar un cero seguido de infinitos nueves con 1; esa serie infinita de nueves está representada, por falta de espacio, con los puntos suspensivos. La suma tiene infinitos términos, y el resultado final es 1 segundo. Luego de ese tiempo, Aquiles pasa, no sin cierto alivio, a la tortuga. Pero no debe relajarse, pues todavía algunos afirman que así no se resuelve el problema. La secuencia infinita de intervalos no tiene un elemento final definido. Aquiles no podría llegar al final no porque le lleve un tiempo infinito, sino porque no existe un elemento último que termine la serie. La objeción parte de la hipótesis de sentido común de que, para terminar una secuencia de eventos, tiene que haber un evento último y, para empezarla, debe haber uno primero. La respuesta a esta objeción sería que la hipótesis es válida para cualquier secuencia finita de eventos, pero no tiene por qué serlo para una infinita.

El problema no termina aquí. Russell encontró aspectos más sutiles y complejos. Consideremos el camino de 10 m recorrido por Aquiles durante 1 segundo. Durante ese tiempo la tortuga recorre 1 m. El recorrido de la tortuga es una parte del de Aquiles. Según Russell, Zenón usa la hipótesis de sentido común de que una parte debe tener menos elementos que el todo. Los elementos que forman el camino son puntos. Si Aquiles pudiera alcanzar a la tortuga, sería posible observar una relación uno a uno entre los puntos de la parte y del todo; en cada instante, el punto en el que se encuentra Aquiles se corresponde con

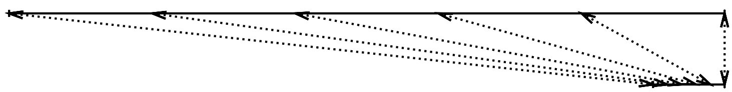


Fig. 3.5. La paradoja de Aquiles y la tortuga, según Russell. Durante el primer segundo Aquiles recorre 10 m y la tortuga 1 m. Para cada instante hay una relación uno a uno entre la posición de Aquiles y la de la tortuga; los trazos punteados indican algunas de estas relaciones. Por lo tanto, existe la misma cantidad de puntos en 10 m que en 1 m. Pero la parte (1 m) debe tener menos elementos que el todo (10 m), entonces el movimiento no existe.

otro en el que está la tortuga. Y esto es absurdo, pues significa que la parte y el todo tienen la misma cantidad de elementos, o puntos. Russell llama a este absurdo la paradoja de Cantor (1845 - 1918), el matemático alemán famoso por su teoría de conjuntos y por el estudio de los números que llamaba transfinitos, por no llamarlos infinitos. Las opciones que tenemos son las siguientes. La de Zenón: el todo tiene más elementos que la parte, y el movimiento no existe. La de Cantor: el movimiento existe, pero el todo puede tener la misma cantidad de elementos que la parte. Las dos opciones tienen algo de absurdo. Russell dice

> El sentido común, por lo tanto, está aquí en una situación muy triste y difícil; debe escoger entre la paradoja de Zenón y la paradoja de Cantor. No me propongo ayudarlo, ya que considero que, de cara a las pruebas, debería suicidarse en la desesperación.

Russell no tiene dudas acerca del camino que se debe elegir: el de Cantor. El axioma de que el todo tiene más elementos que la parte es muy agradable al sentido común, y funciona bien para conjuntos finitos. Pero los conjuntos infinitos no tienen por qué comportarse de acuerdo con el sentido común o con la intuición. El método de correspondencia uno a uno, usado por Cantor, sirve para afirmar que una distancia de 1 metro y otra de 10 metros tienen la misma cantidad de puntos, y para afirmar cosas aún más extrañas de las que no se hablará aquí. Salvamos, entonces, la coherencia lógica de la existencia del movimiento en un espacio continuo. El costo ha sido aceptar la paradoja de Cantor. No es algo que los matemáticos lamenten. Hilbert, otro matemático famoso, decía que "nadie nos podrá expulsar del paraíso que Cantor ha creado".

El problema, sin embargo, tampoco termina aquí. Aquiles parece condenado para siempre a la incertidumbre de no saber si podrá ganarle a la tortuga. La base del método científico es la observación experimental. Nadie niega la evidencia experimental a favor de la existencia del movimiento. Además, hoy disponemos para el movimiento de una descripción matemática coherente y que funciona, o sea, que representa correctamente las observaciones. Sin embargo, algunos sienten que una respuesta satisfactoria a los argumentos de Zenón requiere de un conocimiento del espacio y del tiempo que aún no poseemos. Casi todas las teorías físicas consideran espacio y tiempo continuos, es decir, infinitamente divisibles. Es una hipótesis que funciona bien, pero que no está probada. Se especula que, a escalas más pequeñas de lo imaginable, mucho más pequeñas para un átomo de lo que es un átomo para nosotros, la división del espacio ya no tendría sentido, pues daría lugar a porciones de espacio indistinguibles entre sí. No es posible en la actualidad realizar una medición a esa escala, conocida como escala de Planck, y Zenón seguirá, quizá por mucho tiempo, sin recibir una respuesta completa.

La vigencia de Zenón se manifiesta en un trabajo de Misra y Sudarshan (1977) titulado *La paradoja de Zenón en la teoría cuántica*. No se trata de negar el cambio en mecánica cuántica, sino de frenarlo, o detenerlo por completo, cuando el sistema bajo estudio es observado en forma continua. El sistema puede ser, por ejemplo, un átomo en un estado excitado, o sea, con un electrón con más energía de lo normal. Luego de un tiempo conocido, el electrón vuelve a su estado normal. Pero si se realizan mediciones del estado en forma repetida y a una frecuencia grande, ese retorno se frena. Este resultado recibe el nombre de efecto Zenón cuántico, aunque no tiene nada de paradójico y se trata solo de una reminiscencia de la negación del cambio de Zenón.

Tampoco está ausente en la relatividad general. Suceden cosas extrañas cuando la meta de la carrera entre Aquiles y la tortuga se encuentra dentro de un agujero negro. Desde la perspectiva de un observador lejano ambos corredores, ahora equipados con naves espaciales, parecen moverse cada vez más lento a medida que se acercan a lo que se conoce como horizonte de sucesos. Al aproximarse a ese punto su movimiento prácticamente se detiene. Para la descripción matemática de este proceso se usa un sistema de coordenadas denominado coordenadas de la tortuga.

El relato de Diógenes Laercio sobre el final de Zenón es uno de las más inverosímiles que figuran en su libro. Zenón se involucró con un grupo que buscaba liberar Elea de un tirano llamado Nearco. Algo salió mal, pues Zenón fue capturado. Luego fue torturado para que revelara los nombres de sus cómplices. Se mantuvo firme y, para no caer en la delación, cortó su lengua con sus dientes y la escupió al tirano. Otra versión dice que lo hizo acercarse con intención de decirle algo en voz baja, y lo atacó a mordiscos sacándole una oreja o la nariz. A partir de este punto tenemos dos finales posibles. Según una versión, arengó a los presentes diciendo: “Estoy admirado de vuestra cobardía, pues por miedo de lo que yo padezco sois esclavos de un tirano”. Los ciudadanos reaccionaron matando al tirano a pedradas. El otro final es menos feliz: no hubo reacción de los ciudadanos y Zenón fue condenado a morir machacado en un mortero.

Fig. 3.6. Final de Anaxarco, según una ilustración de 1598. La misma escena podría estar representando a Zenón de Elea. Dicen que, durante el suplicio, Anaxarco permaneció sereno y pronunció su frase célebre: "Machaca el cuero que contiene a Anaxarco, pero a Anaxarco no lo machacas".

Anaxarco (Ανάξαρχος, c. 380 - c. 320 a. C.) fue un seguidor del atomismo y de las tendencias escépticas de Demócrito que tiene cierta relación con Zenón, al menos en lo que se refiere a su final. Era natural de Abdera, como Demócrito, y estuvo con Alejandro Magno durante sus campañas. Expresó escepticismo sobre la supuesta naturaleza divina de Alejandro, una vez que fue herido, al decir "Esto es sangre, y no el licor que fluye por las venas de los dioses". Anaxarco y Nicocreón, tirano de Chipre, se enemistaron durante una comida en la que se encontraba Alejandro. Es que Anaxarco no tuvo mejor idea que decir, mientras miraba fijo a Nicocreón, que el banquete estaba magnífico, solo faltaba servir la cabeza de cierto sátrapa. Nicocreón no olvidó las ofensas y, tiempo después, cuando Anaxarco pasó por su ciudad, lo apresó y lo mandó matar machacándolo en un mortero. Se trata del mismo final que se atribuye a Zenón, incluyendo también el corte de lengua y su escupida al tirano. En algún momento de la Antigüedad, a alguien se le traspapelaron los papiros y asignó la misma muerte a personajes diferentes.

Borges se refiere a la paradoja de Aquiles y la tortuga en un texto que termina con un dejo idealista:

> Nosotros (la indivisa divinidad que opera en nosotros) hemos soñado el mundo. Lo hemos soñado resistente, misterioso, visible, ubicuo en el espacio y firme en el tiempo; pero hemos consentido en su arquitectura tenues y eternos intersticios de sinrazón para saber que es falso.

Uno de esos intersticios sería la paradoja de Zenón. La película de ciencia ficción *Inception* (2010) presenta el mundo ilusorio de nuestros sueños, que se vive como real, también con intersticios de sinrazón que delatan su falsedad; un ejemplo es un trompo que gira y nunca cae. Más que intersticios, el universo tiene, en realidad, grandes agujeros de sinrazón, y que exista o que se comporte de acuerdo con reglas no son los menores. Estos agujeros pueden ser un indicio de falsedad, pero no una prueba. Son, más bien, una prueba de nuestra incapacidad para alcanzar la comprensión total.

Veinte años después, Borges parece acercarse a una postura más realista al hablar sobre las refutaciones del tiempo.

> Negar la sucesión temporal, negar el yo, negar el universo astronómico, son desesperaciones aparentes y consuelos secretos. Nuestro destino (...) no es espantoso por irreal; es espantoso porque es irreversible y de hierro. (...) El mundo, desgraciadamente, es real; yo, desgraciadamente, soy Borges.

Borges dice que el mundo es real, no un sueño con intersticios de sinrazón. Antes se preguntaba, con respecto a la paradoja: "¿Es un legítimo instrumento de indagación o apenas una mala costumbre?". Quizá, después de todo, no sea más que una mala costumbre. Una que dura milenios.